

ARTUR BĂLĂUCĂ
CĂTĂLIN BUDEANU **GABRIEL MÎRȘANU**

ALGEBRĂ GEOMETRIE

Clasa a VIII-a

- **Itemi cu note**
- **Modele de teste pentru recapitulare și aprofundare
ce conțin itemi cu note și bareme de notare**
- **Teste inițiale**
- **Variante de teste pentru lucrarea scrisă semestrială**

EDITURA TAIDA
- IAȘI, 2020 -

- CUPRINS -

ALGEBRĂ

Breviar Enunțuri Soluții

CAPITOLUL I. RECAPITULARE ȘI APROFUNDARE. NUMERE REALE

I.1.	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Probleme de recunoaștere a numerelor naturale întregi, raționale, iraționale. Probleme rezolvate	7	9	255
I.2.	Reprezentarea numerelor reale pe axa numerelor prin aproximări. Ordonarea numerelor reale. Modulul unui număr real (valoarea absolută)	11	13	256
	Test 1. Test 2 (inițiale)		15	257
I.3.	Operații cu numere reale. Probleme rezolvate	18	19	258

CAPITOLUL II. INTERVALE DE NUMERE REALE. INECUAȚII ÎN \mathbb{R}

II.1.	Mulțimi definite printr-o proprietate comună a elementelor lor	27	27	259
II.2.	Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Proprietățile relației de inegalitate (ordine în \mathbb{R}). Probleme rezolvate	29	30	260
II.3.	Operații cu intervale de numere reale. Reuniunea. Intersecția. Diferența și Incluziunea intervalelor (extinderi). Probleme rezolvate	31	34	260
II.4.	Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$. Probleme rezolvate	37	38	262
	Test 3		40	263

CAPITOLUL III. CALCUL ALGEBRIC ÎN MULȚIMEA NUMERELOR REALE

III.1.	Operații cu numere reale reprezentate prin litere			
III.1.1.	Adunarea și scăderea. Termeni asemenea. Reducerea termenilor asemenea. Probleme rezolvate	41	43	264
III.1.2.	Înmulțirea. Împărțirea. Ridicarea la putere cu exponent întreg. Probleme rezolvate	45	46	264
III.2.	Formule de calcul prescurtat.			
III.2.1.	$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Probleme rezolvate	49	51	265
III.2.2.	$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, unde $a, b \in \mathbb{R}$. Probleme rezolvate	54	55	267
III.2.3.	$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$ (extinderi). Probleme rezolvate	57	58	267
III.3.	Descompunerea în factori utilizând reguli de calcul în \mathbb{R}			
III.3.1.	Factor comun. Probleme rezolvate	59	59	268
III.3.2.	Grupare de termeni. Probleme rezolvate	61	62	269
III.3.3.	Descompunerea diferenței de pătrate. Probleme rezolvate	63	64	269
III.3.4.	Restrângerea ca pătrat. Probleme rezolvate	65	65	270
III.3.5.	$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$ (extinderi). Probleme rezolvate	66	66	270
III.3.6.	Metode combinate. Probleme rezolvate	66	67	271
III.3.7.	Aplicații la descompunerea în factori. Probleme rezolvate	69	69	272
	Test 4. Test 5		71	273

CAPITOLUL IV. FRAȚȚII ALGEBRICE

IV.1.	Amplificarea și simplificarea fracțiilor algebrice. Probleme rezolvate	72	74	273
IV.2.	Operații cu fracții algebrice (adunarea, scăderea, înmulțirea, împărțirea, ridicarea la putere). Probleme rezolvate	76	77	274
IV.3.	Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor. Aplicații (extinderi). Probleme rezolvate	82	83	276
	Test 6		87	277
IV.4.	Ecuția de forma $ax^2 + bx + c = 0$, unde $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Probleme rezolvate.	88	90	277
	Test 7		95	281

CAPITOLUL V. FUNCȚII. ELEMENTE DE STATISTICĂ

V.1.	Produs cartezian. Reprezentarea într-un sistem ortogonal de coordonate (recapitulare)	96	97	281
------	---	----	----	-----

V.2.	Noțiunea de funcție. Funcții definite pe mulțimi finite, exprimate cu ajutorul unor diagrame, tabele, formule; graficul unei funcții, reprezentarea geometrică a graficului unor funcții numerice	98	101	281
V.3.	Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat ($D \neq \emptyset$); interpretare geometrică; lecturi grafice. Probleme rezolvate	106	108	283
V.4.	Elemente de statistică: indicatorii tendinței centrale (frecvență, medie, mediană, mod și amplitudine a unui set de date). Probleme rezolvate	115	118	285
	Test 8. Test 9		119	286

GEOMETRIE

CAPITOLUL I. ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

I.1.	Introducere. Reguli (convenții) de reprezentare în plan a figurilor geometrice	122	123	287
I.2.	Puncte, drepte, plane: convenții de notare, reprezentări, determinarea dreptei, determinarea planului, relații între puncte, drepte și plane. Probleme rezolvate	125	128	287
I.3.1.	Piramida, piramida regulată, tetraedru regulat. Probleme rezolvate	130	132	288
I.3.2.	Prisma dreaptă, paralelipipedul dreptunghic, cubul. Probleme rezolvate	135	137	289
I.3.3.	Cilindrul circular drept, con circular drept	140	140	290
I.4.1.	Pozițiile relative a două drepte în spațiu; relația de paralelism în spațiu. Probleme rezolvate	142	143	291
I.4.2.	Unghiul a două drepte în spațiu. Unghiuri cu laturile respectiv paralele în spațiu. Probleme rezolvate	145	146	291
I.4.3.	Dreaptă paralelă cu un plan. Probleme rezolvate	148	149	292
I.4.4.	Plane paralele, aplicații. Teorema lui Thales în spațiu (extinderi). Probleme rezolvate	151	153	292
	Test 10		155	293
I.4.5.	Secțiuni paralele cu baza în corpurile geometrice studiate; trunchiul de piramidă și trunchiul de con circular drept (descriere și reprezentare). Probleme rezolvate	156	157	293
I.5.1.	Perpendicularitate: drepte perpendiculare, dreaptă perpendiculară pe un plan, aplicații: distanța de la un punct la un plan; înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept. Probleme rezolvate	158	161	294
I.5.2.	Distanța dintre două plane paralele, înălțimea prisme drepte, a paralelipipedului dreptunghic, a cilindrului circular drept, a trunchiului de piramidă/con circular drept. Probleme rezolvate	164	167	296
I.5.3.	Secțiuni diagonale, secțiuni axiale în corpurile studiate	168	169	296
I.6.1.	Proiecții de puncte, de segmente și de drepte pe un plan. Probleme rezolvate	170	172	299
I.6.2.	Unghiul dintre o dreaptă și un plan; lungimea proiecției unui segment. Probleme rezolvate	174	175	300
I.6.3.	Unghi diedru; unghi plan corespunzător diedrului; unghiul a două plane. Probleme rezolvate	178	180	302
I.6.4.	Plane perpendiculare. Probleme rezolvate	183	184	304
I.7.	Teorema celor trei perpendiculare; calculul distanței de la un punct la o dreaptă; calculul distanței de la un punct la un plan; calculul distanței dintre două plane paralele. Probleme rezolvate	186	187	305
	Testele 11, 12, 13, 14, 15		191	309

CAPITOLUL II. ARII ȘI VOLUME ALE UNOR CORPURI GEOMETRICE

II.1.	Distanțe și măsuri de unghiuri pe fețele sau în interiorul corpurilor geometrice studiate (determinare prin calcul)		197	310
II.2.	Piramida triunghiulară regulată. Tetraedru regulat. Probleme rezolvate	199	202	315
II.3.	Piramida patrulateră regulată. Probleme rezolvate	205	206	316

II.4.	Piramida hexagonală regulată. Probleme rezolvate	208	210	317
	Test 16		211	317
II.5.	Prisma dreaptă cu baza un triunghi echilateral (triunghiulară regulată). Probleme rezolvate	212	213	317
II.6.	Prisma dreaptă cu baza un pătrat (patrulateră regulată). Probleme rezolvate	216	217	319
II.7.	Cubul. Probleme rezolvate	218	218	319
II.8.	Paralelipipedul dreptunghic. Probleme rezolvate	220	221	320
II.9.	Prisma dreaptă cu baza un hexagon regulat (hexagonală regulată). Probleme rezolvate	223	224	321
	Test 17		225	321
II.10.	Trunchiul de piramidă patrulateră regulată. Probleme rezolvate	226	227	322
II.11.	Trunchiul de piramidă triunghiulară regulată. Probleme rezolvate	229	230	322
	Test 18		231	323
II.12.	Cilindrul circular drept. Probleme rezolvate	232	233	323
II.13.	Conul circular drept. Probleme rezolvate	235	236	324
II.14.	Trunchiul de con circular drept. Probleme rezolvate	238	238	324
II.15.	Sfera: arie, volum, Probleme rezolvate	241	241	325
	Teste recapitulative. Testele 19, 20, 21		243	325
CAPITOLUL III. VARIANTE DE SUBIECTE PENTRU LUCRAREA SCRISĂ SEMESTRIALĂ				
	Semestrul I. Testele 22, 23, 24, 25	246		326
	Semestrul al II-lea, Testele 26, 27, 28, 29	250		328
REZULTATE, INDICAȚII, SOLUȚII, COMENTARII				255
BIBLIOGRAFIE				331



Editura Teora
 Succesul tău începe cu noi!

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. RECAPITULARE ȘI APROFUNDARE. NUMERE REALE

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Probleme de recunoaștere a numerelor naturale, întregi, raționale, iraționale. Probleme rezolvate.

$$\mathbb{R} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+;$$

$$n = 0,0200200020000200000200000020000002000000002...$$

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

$$\pi = 3,1415926535897932384626433832795028841971...$$

Observații: Ecuația $x^2 = 6$ nu are soluții în \mathbb{Q} .

Demonstrație: Presupunem prin absurd că există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$, unde $m, n \in \mathbb{Z}^*$ și $(m, n) = 1$,

astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 6$. Din $\frac{m^2}{n^2} = 6$ rezultă $m^2 = 6n^2$, de unde $2|m$. Deci $m = 2k$ ($k \in \mathbb{Z}^*$) și $4k^2 = 6n^2$ sau $2k^2 = 3n^2$.

1. Cum $(2, 3) = 1$ rezultă $2|n^2$, adică $2|n$. Contradicție, pentru că $(m, n) = 1$.
2. $\sqrt{6} = 2,4494897427831...$
3. Un număr este **rațional** dacă și numai dacă se poate scrie sub formă de fracție zecimală cu un număr finit de zecimale sau cu o infinitate de zecimale care se succed periodic.
4. Numărul $0,0100100010000100000100000010000001...$ nu este fracție zecimală periodică. (are o infinitate de zecimale care nu se succed periodic)
5. Un număr este **irațional** dacă poate fi scris ca o fracție zecimală cu o infinitate de zecimale dar care nu se succed periodic.
6. Mulțimea numerelor raționale reunită cu mulțimea numerelor iraționale formează mulțimea numerelor reale pe care o notăm cu \mathbb{R} .
7. Orice număr real pozitiv se reprezintă printr-o fracție zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots}$, unde a_0 este **partea întregă** a lui x și se notează cu $[x]$, iar $\overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ este **partea fracționară** a lui x și se notează $\{x\}$. Avem $x = [x] + \{x\}$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$.
8. Orice număr real negativ x ($x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$) se reprezintă printr-o fracție zecimală de forma $x = \overline{a_0, a_1 a_2 a_3 \dots}$, unde $a_0 - 1$ este partea întregă a lui x , iar $1 - \overline{0, a_1 a_2 a_3 \dots}$ este partea fracționară a lui x . Avem $x = [x] + \{x\}$. Dacă $x \in \mathbb{Z}$, atunci $[x] = x$ și $\{x\} = 0$.

Probleme rezolvate:

1. Un număr rațional poate fi reprezentat prin fracții ordinare echivalente sau printr-o fracție zecimală finită sau periodică.

Exemple: a) $\frac{2}{5} \frac{48}{10} = \frac{96}{10} = 9,6$ fracție zecimală finită;

b) $\frac{28}{12} = \frac{7}{3} = 2,33\dots = 2,(3)$, fracție zecimală periodică simplă;

c) $\frac{125}{12} = 10,41(6)$, fracție zecimală periodică mixtă.

2. Reprezentați sub formă de fracție ordinară fiecare dintre numerele:

- a) 2,75; c) 3,(4); e) 2,(234); g) 12,0(45);
 b) 0,124; d) 14,(18); f) 0,1(62); h) 4,1(345).

Rezolvare:

a) $2,75 = \frac{275}{100} = \frac{11}{4}$; b) $0,124 = \frac{124}{1000} = \frac{31}{250}$; c) $3,(4) = 3\frac{4}{9} = \frac{31}{9}$;

d) $14,(18) = 14\frac{18}{99} = 14\frac{2}{11} = \frac{156}{11}$; e) $2,(234) = 2\frac{234}{999} = 2\frac{26}{111} = \frac{248}{111}$;

f) $0,1(62) = \frac{162-1}{990} = \frac{161}{990}$; g) $12,0(45) = 12\frac{45}{990} = 12\frac{1}{22} = \frac{265}{22}$;

h) $4,1(345) = 4\frac{1345-1}{9990} = 4\frac{1344}{9990} = 4\frac{224}{1665} = \frac{6884}{1665}$.

3. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții și dați câte un contraexemplu pentru propozițiile false:

- a) „Orice număr întreg este număr natural.“ b) „Orice număr natural este număr întreg.“
 c) „Orice număr real este număr irațional.“ d) „Orice număr întreg este număr real.“
 e) „Orice număr real este număr rațional.“ f) „Orice număr întreg este număr rațional.“
 g) „Orice număr rațional este număr real.“
 h) „Pătratul oricărui număr irațional este un număr rațional.“
 i) „Suma a două numere iraționale este un număr irațional.“

Rezolvare:

a) F ($-3 \notin \mathbb{N}$); b) A ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$); c) F ($-\frac{3}{4} \notin \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$); d) A ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$); e) F ($\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$); f) A ($\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$);

g) A ($\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$); h) F ($(2-\sqrt{3})^2 = 7-4\sqrt{3} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$); i) F ($((2\sqrt{3}+5)+(5-2\sqrt{3})) = 10$).

4. Demonstrați că pentru orice $n \in \mathbb{N}$ numerele $\sqrt{5n+8}$ și $\sqrt{5n+7}$ sunt iraționale.

Rezolvare:

Presupunem că $\sqrt{5n+8} \in \mathbb{N}$. Atunci $5n+8 = k^2$, $k \in \mathbb{N}^*$, deci numărul $5n+8$ este pătrat perfect. Dar $U(5n+8) \in \{3;8\}$, contradicție!

Analog, $U(5n+7) \in \{2;7\}$ etc.

5. Determinați cifrele distincte a și b în baza zece știind că $\sqrt{4ab} \in \mathbb{N}$.

Rezolvare:

$\sqrt{4ab} \in \mathbb{N}$ implică $\overline{4xy} = k^2$, unde $k \in \mathbb{N}^*$.

Însă $20^2 \leq \overline{4ab} \leq 22^2$, de unde $\overline{4ab} \in \{20^2; 21^2; 22^2\}$ și $\overline{4ab} \in \{400; 441; 484\}$. Cum $a \neq b$ rezultă că $\overline{4ab} \in \{441; 484\}$. Deci $a = 4, b = 1$ sau $a = 8$ și $b = 4$.

6. Arătați că numărul $\sqrt{2005^{2012} + 2007^{2011}} \notin \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$\cup(2005^{2012}) = 5$ și $\cup(2007^{2011}) = \cup(2007^4 \cdot 502^3) = \cup(2007^3) = \cup(7^3) = 3$.

Deci $\cup(2005^{2012} + 2007^{2011}) = \cup(5 + 3) = 8$ etc.

7. Arătați că numărul $a = \sqrt{5+15+25+\dots+2015+404^2} \in \mathbb{Q}$.

Rezolvare:

$a = \sqrt{5(1+3+5+\dots+403)+404^2} = \sqrt{5 \cdot 202^2 + 2^2 \cdot 202^2} = \sqrt{202^2 \cdot 9} = 3 \cdot 202 = 606 \in \mathbb{Q}$.

8. Aflați partea întreagă și partea fracționară a următoarelor numere reale:

a) 7,12; b) -9; c) -4,(3); d) $\frac{17}{3}$; e) $-14\frac{3}{7}$; f) $\frac{4n+7}{4n+3}, n \in \mathbb{N}^*$; g) $\sqrt{23}$.

Rezolvare:

a) $[7,12] = 7; \{7, 12\} = 0,12$; b) $[-9] = -9; \{-9\} = 0$; c) $[-4,(3)] = -5; \{-4,(3)\} = \frac{2}{3}$;

d) $\left[\frac{17}{3}\right] = 5; \left\{\frac{17}{3}\right\} = \frac{2}{3}$; e) $\left[-14\frac{3}{7}\right] = -15; \left\{-14\frac{3}{7}\right\} = -\frac{4}{7}$; f) $\left[\frac{4n+7}{4n+3}\right] = 1$ și $\left\{\frac{4n+7}{4n+3}\right\} = \frac{4}{4n+3}$.

g) $4 < \sqrt{23} < 5$, deci $[\sqrt{23}] = 4$ și $\{\sqrt{23}\} = \sqrt{23} - 4$.

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Scrieți în formă zecimală numerele raționale: a) $\frac{5}{8}; \frac{7}{25}; \frac{3}{125}; \frac{1}{80}; \frac{3}{40}; \frac{1}{12}$;

b) $\frac{1}{33}; \frac{1}{39}; \frac{4}{7}; \frac{7}{16}; \frac{11}{50}; \frac{2}{3}$; c) $\frac{7}{6}; \frac{5}{80}; \frac{36}{28}; \frac{5}{32}; \frac{11}{75}$. (nota 5)

2. Determinați: a) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}$; b) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Z}$; c) $\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}$; d) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Q}$; e) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z}_-$; f) $\mathbb{N} \cap \mathbb{R}$; g) $\mathbb{N} \cup \mathbb{R}$; h) $\mathbb{Z}^* \cup \mathbb{Q}$; i) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}$; j) $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{R}$; k) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$; l) $\mathbb{Z} \setminus \mathbb{Q}$; m) $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Q}$. (nota 5)

3. Scrieți fracțiile în formă ireductibilă și precizați dacă fracția zecimală care reprezintă numărul rațional este periodică simplă, periodică mixtă sau are un număr finit de zecimale (nu toate nule). a) $\frac{25}{75}$; b) $\frac{4}{28}$; c) $\frac{305}{427}$; d) $\frac{1,2}{5,6}$; e) $\frac{2,01}{8,1}$; f) $\frac{6}{80}$;

g) $\frac{21}{45}$; h) $\frac{0,2}{1,1}$; i) $\frac{3,5}{0,(6)}$; j) $\frac{35}{30}$; k) $\frac{35}{56}$; l) $\frac{1,15}{69}$; m) $\frac{26}{14}$; n) $\frac{2,1}{3,3}$; o) $\frac{56}{40}$.

a) \rightarrow o) - (nota 5); d) \rightarrow n) - (nota 7)

II. 4. Inecuații de forma $ax + b \geq 0$ ($\leq, <, >$), unde $a, b \in \mathbb{R}$.

Probleme rezolvate.

Atenție!

Vezi proprietățile relației de inegalitate (ordine în \mathbb{R}) de la paragraful II. 2.

O inecuație de forma $ax + b < 0$, $ax + b \leq 0$, $ax + b > 0$ sau $ax + b \geq 0$ se numește inecuație de gradul I cu o necunoscută ($a \neq 0$).

Numărul real x_0 este soluție a inecuației $ax + b < 0$ dacă $ax_0 + b < 0$.

Două inecuații de gradul I cu o necunoscută sunt echivalente dacă au aceeași mulțime de soluții.

Pentru inecuațiile $ax + b < 0$ și $ax + b \leq 0$ avem, respectiv, soluțiile:

Dacă $a > 0$, atunci $x < -\frac{b}{a}$ și $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$. Dacă $a < 0$, atunci $x > -\frac{b}{a}$ și $S = \left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Dacă $a > 0$, atunci $x \leq -\frac{b}{a}$ și $S = \left(-\infty; -\frac{b}{a}\right]$. Dacă $a < 0$, atunci $x \geq -\frac{b}{a}$ și $S = \left[-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Probleme rezolvate:

1. Rezolvați în \mathbb{R} inecuațiile:

a) $-3x \leq -15x$; b) $x + 2 \leq 5x$; c) $\frac{3x-4}{2} < \frac{3}{5}$; d) $|3x-8| \leq 12$; e) $\sqrt{2}x + 3 < x\sqrt{3} - 2$.

Rezolvare:

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad & -3x \leq -15x & | +15x \\ & 12x \leq 0 & | :12 \\ & x \leq 0 \\ & S = (-\infty; 0]. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b)} \quad & x + 2 \leq 5x & | -5x \\ & -4x + 2 \leq 0 & | -2 \\ & -4x \leq -2 & | :(-2) \\ & x \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$S = \left[\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

$$\begin{aligned} \text{c)} \quad & 5(3x-4) < 6 \\ & 15x - 20 < 6 & | +20 \\ & 15x < 26 & | :15 \\ & x < \frac{26}{15} \\ & S = \left(-\infty; \frac{26}{15}\right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d)} \quad & -12 \leq 3x - 8 \leq 12 & | +8 \\ & -4 \leq 3x \leq 20 & | :3 \end{aligned}$$

$$-\frac{4}{3} \leq x \leq \frac{20}{3}$$

$$S = \left[-\frac{4}{3}; \frac{20}{3}\right].$$

$$\begin{aligned} \text{e)} \quad & \sqrt{2}x + 3 < x\sqrt{3} - 2 \quad | -3 \\ & \sqrt{2}x < x\sqrt{3} - 5 \quad | -x\sqrt{3} \\ & \sqrt{2}x - x\sqrt{3} < -5 \\ & (\sqrt{2} - \sqrt{3})x < -5 \quad | \cdot (-1) \\ & (\sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot x > 5 \quad | \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2}) \\ & x > 5(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\ & S = (5\sqrt{2} + 5\sqrt{3}; +\infty) \end{aligned}$$

2. Triunghiul ABC are perimetrul de 36 cm și $AB = 3 \cdot AC$. Aflați:

- a) intervalul în care ia valori lungimea laturii AC ;
 b) lungimile laturilor dacă acestea sunt exprimate în centimetri prin numere întregi.

Rezolvare:

a) Notăm $AC = x$ și $BC = y$. Atunci $AB = 3x$ și $4x + y = 36$, de unde $y = 36 - 4x$.

Din *teorema de existență* a unui triunghi avem relațiile: $|3x - x| < 36 - 4x < x + 3x$.

Inecuația $|3x - x| < 36 - 4x$ este echivalentă cu inecuațiile: $2x < 36 - 4x$; $6x < 36$; $x < 6$.

Inecuația $36 - 4x < 4x$ este echivalentă cu inecuațiile: $36 < 8x$; $\frac{9}{2} < x$. Deci $x \in (4,5;6)$.

b) $(4,5;6) \cap \mathbb{N}^* = \{5\}$. Deci $AC = 5$ cm; $AB = 15$ și $BC = 16$ cm.

EXERCII ȘI PROBLEME

1. Verificați dacă -2 este soluție pentru inecuațiile următoare: a) $4x - 7 < 0$; b) $3x \geq x - 1$;
 c) $-3x + 6 \geq 0$; d) $5x - 15 \leq 0$; e) $12 - 3x < 0$; f) $x > -3$; g) $\frac{x-3}{2} \leq 0$; h) $\frac{x+5}{2} \geq 0$.

(nota 5)

2. Fie mulțimea $A = \{-3; -2; -\sqrt{3}; -1; 0; 1; 3; \sqrt{11}\}$. Precizați elementele mulțimii A care sunt soluții ale inecuațiilor: a) $2x - 3 \leq -6$; b) $4x - 1 \leq 2x - 3$; c) $2x + 1 \geq -5x - 6$;
 d) $|x| \leq 4$; e) $-4x - 5 < 2x + 7$; f) $7x - 3 \leq -2x + 15$; g) $|x| \leq -1$; h) $2|x| < 5$. (nota 7)

3. Să se rezolve în \mathbb{N} inecuațiile: a) $-x + 5 \geq 0$; b) $-2x + 3 < 0$; c) $-8x - 4 \geq 0$;
 d) $4x \geq -5x + 36$; e) $-9x \geq -15x$; f) $4 \cdot (x - 1) - 3x \leq 2x + 1$; g) $|2x - 5| \leq 4$; h) $|6 - 2x| \leq 0$.
 a); b); c); d); e) - (nota 5); f) - (nota 7); g); h) - (nota 9)

4. Să se rezolve în \mathbb{Z} inecuațiile: a) $-x + 4 \leq 0$; b) $-5x + 3 < 0$; c) $-9x - 3 \geq 0$; d) $-9x \geq$
 $\geq -3x + 12$; e) $-9x \leq -17x$; f) $3(1 - x) + 4(x - 5) \leq -3(x - 1) + 4$; g) $3(x - 1) - \frac{2-x}{3} \leq$
 $\leq 4(x - 1) - \frac{x-5}{2} - x$; h) $|x - 3| \leq 2$; i) $|3 - 5x| \leq 0$; j) $|4x - 8| \leq 15$; k) $|2x - 4| \leq 0$. (nota 7)

5. Determinați elementele mulțimilor: $A = \{x \in \mathbb{N}^* / -3 \leq x < 4\}$; $B = \{x \in \mathbb{Z}^* / -3 \leq x < 4\}$;
 $C = \{x \in \mathbb{Z} / |x| \leq 3\}$; $D = \{x \in \mathbb{R} / |x| \geq 2\}$; $E = \{x \in \mathbb{Z}^* / -10 \leq 4x + 5 \leq 27\}$; $F = \{x \in \mathbb{Q} / \frac{4-x}{|x-5|} < 0\}$;

$$G = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x+7}{x^2+2x+2} > 0\}; H = \{x \in \mathbb{R} / \frac{|x|-5}{(x^2+1)|x+4|} < 0\}; I = \{x \in \mathbb{R} / \frac{|2x+3|(x^2+7)}{2-|x|} < 0\}.$$

A, B, C - (nota 7); D, E - (nota 9); F, G, H, I - (nota 10)

6. Determinați numerele reale a pentru care expresia $\sqrt{3-5a} + \sqrt{7a-1}$ are definită valoarea. (nota 9)

GEOMETRIE

CAPITOLUL I

ELEMENTE ALE GEOMETRIEI ÎN SPAȚIU

I. 1. Introducere. Reguli (convenții) de reprezentare în plan a figurilor geometrice

Să reținem:

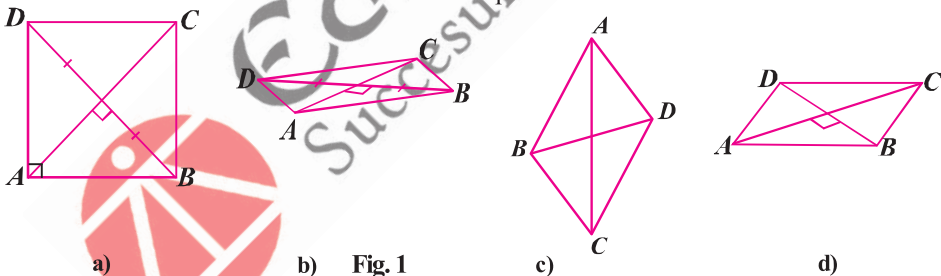
- Alegem ca plan de desen un plan vertical (planul tablei).
- Segmentele orizontale sau verticale paralele cu planul de desen vor fi reprezentate prin segmente orizontale, respectiv, verticale congruente cu cele date.
- Segmentele perpendiculare pe planul de desen vor fi reprezentate înclinate față de orizontală și cu lungimile reduse.
- Pentru toate celelalte linii și segmente ne alegem un anumit unghi cu care le vom înclina.
- În acest mod dreptele paralele vor fi reprezentate în plan tot prin drepte paralele.
- Raportul în care un punct împarte un segment rămâne același.
- Unghiurile se deformează: unghiurile drepte pot să apară cu unghiuri ascuțite sau obtuze, unele unghiuri ascuțite pot să apară ca unghiuri obtuze etc.
- Liniile care, în realitate nu se văd vor fi desenate punctat (cu linie discontinuă).

Să observăm:

Exemple de aplicare a regulilor (convențiilor) prezentate mai sus:

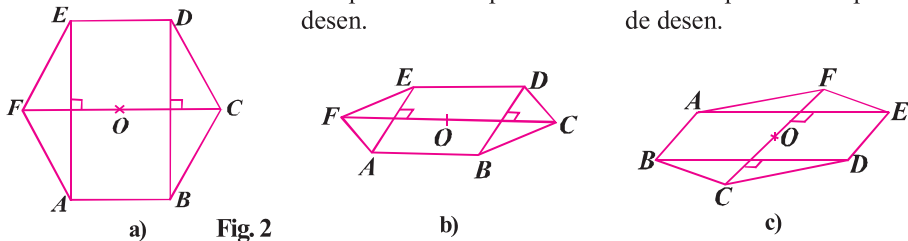
1) Un pătrat $ABCD$

În plan vertical paralel cu planul de desen. În plan orizontal cu diagonala DB paralelă cu planul de desen. În plan vertical cu diagonala AC perpendiculară pe desen. În plan orizontal cu latura AB paralelă cu planul de desen.



2) Un hexagon regulat $ABCDEF$

În plan vertical paralel cu planul de desen. În plan orizontal cu latura AB paralelă cu planul de desen. În plan orizontal cu diagonala BD paralelă cu planul de desen.



3) O suprafață dreptunghiulară $ABCD$

În plan vertical paralel cu Pliată după linia mijlocie MN Pliată după linia mijlocie MN
 planul de desen (latura BC „în spate“) (latura BC „în față“)

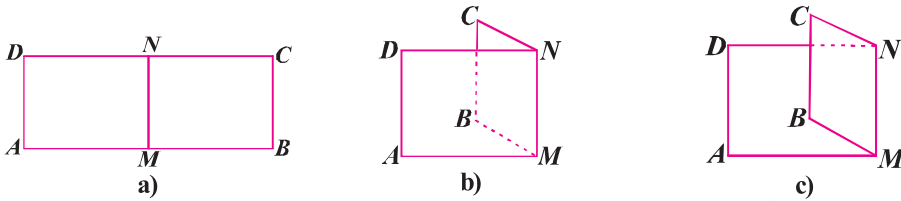


Fig. 3

EXERCIȚII ȘI PROBLEME

1. În figura 4 este reprezentat un triunghi isoscel ABC cu baza BC în care segmentul AM este mediană. Comparați măsurile unghiurilor:

a) $\sphericalangle ABC$ și $\sphericalangle ACB$; b) $\sphericalangle AMB$ și $\sphericalangle AMC$.

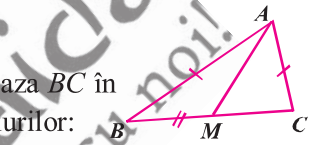


Fig. 4

(nota 5)

2. În figura 5 este reprezentat triunghiul dreptunghic isoscel MNP cu ipotenuza PN . Dacă punctul O este mijlocul segmentului PN , stabiliți valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $\sphericalangle MOP \equiv \sphericalangle PMN$; b) $\sphericalangle OMN \equiv \sphericalangle PMO$; c) $OM \equiv ON$.

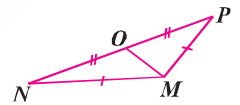


Fig. 5

(nota 5)

3. În figura 6 este reprezentat un triunghi echilateral ABC în care s-a notat cu D mijlocul laturii BC .

Precizați valoarea de adevăr a fiecăreia dintre următoarele propoziții:

a) $\sphericalangle BAD > \sphericalangle C$;
 b) $\sphericalangle ADC = 90^\circ$; c) $AD < DC$.

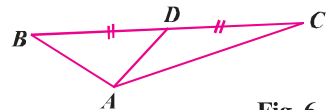


Fig. 6

(nota 5)

4. În figura 7 este reprezentat un pătrat $ABCD$, iar $\{O\} = AC \cap BD$.

Comparați: a) lungimile segmentelor OA și OB ;

b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle AOD$ și $\sphericalangle COD$;

c) măsurile unghiurilor $\sphericalangle OAB$ și $\sphericalangle OBC$.

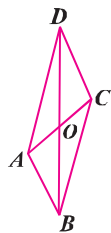


Fig. 7

(nota 5)

5. În figura 8 este reprezentat un hexagon regulat $ABCDEF$ în care s-a notat cu O mijlocul diagonalei FC .

Comparați:

a) lungimile segmentelor FC și BE ;

b) măsurile unghiurilor $\sphericalangle DEA$ și $\sphericalangle EFA$;

c) măsurile unghiurilor $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle DPC$ unde $\{P\} = FC \cap BD$.

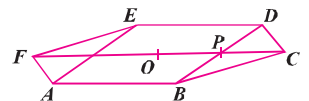


Fig. 8

(nota 7)

Teste recapitulative

§ Test 14

I. Completați spațiile punctate:

1. Dacă $a \perp \alpha$ și $b \subset \alpha$, atunci $\sphericalangle(a, b) = \dots^\circ$. (5p) (nota 5)
2. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată cu $AB = 7$ cm și $AA' = 11$ cm. Distanța de la B' la AB este egală cu ... cm. (5p) (nota 5)
3. $ABCD A'B'C'D'$ este un cub cu lungimea muchiei de 4 cm. Distanța de la D' la AC este egală cu ... cm. (5p) (nota 5)
4. Dacă $ABCD$ este un dreptunghi cu $AB = 8$ cm și $BC = 6$ cm iar $MA \perp (ABC)$, $MA = 6$ cm, atunci distanța de la M la BC este egală cu ... cm. (10p) (nota 5)
5. Fie $ABCD A'B'C'D'$ o prismă patrulateră regulată. Măsura unghiului dintre planele (ABC) și (CDD') este egală cu ... $^\circ$. (5p) (nota 5)
6. Fie $ABCA'B'C'$ o prismă triunghiulară regulată. Măsura unghiului dintre planele (ABB') și (ACC') este egală cu ... $^\circ$. (10p) (nota 5)
7. $ABCD A'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic cu $AB = 3$ m, $BC = 6$ m, $AA' = 6\sqrt{3}$ m. Distanța de la A la dreapta $B'C$ este egală cu ... m. (5p) (nota 7)
8. Se dau propozițiile: $p_1: a \perp \alpha$ și $a \parallel \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$; $p_2: \alpha \perp \beta$ și $a \parallel \beta \Rightarrow a \perp \alpha$; $p_3: \alpha \perp \beta$ și $b \perp \beta \Rightarrow b \parallel \alpha$ sau $b \subset \alpha$; $p_4: a \perp b$ și $a \perp \alpha$ iar $b \perp \beta \Rightarrow \alpha \perp \beta$; $p_5: \beta \perp \alpha$ și $\gamma \perp \alpha \Rightarrow \beta \parallel \gamma$, unde a, b sunt drepte, iar α, β, γ sunt plane. Dintre aceste propoziții sunt adevărate propozițiile ... (5p) (nota 9)
9. Într-o piramidă triunghiulară regulată cu latura bazei de 6 cm, unghiul format de planul unei fețe laterale cu planul bazei are măsura de 60° .
 - a) lungimea înălțimii piramidei este egală cu ... cm;
 - b) lungimea muchiei laterale este egală cu cm.(5p) (nota 7)

II. Scrieți rezolvările complete:

1. Fie M mijlocul laturii AB a unui dreptunghi $ABCD$ și $\{N\} = DB \cap MC$ iar $NP \perp (ABC)$. Dacă $AB = 12$ cm, $BC = 9$ cm și $NP = 6$ cm, să se determine distanța de la punctul P la dreptele: a) AB ; b) BC ; c) AD ; d) DC . (10p) (nota 7)
2. Un triunghi isoscel ABC cu baza $BC = 2a$ și înălțimea $AD = a\sqrt{2}$ se îndoiește după dreapta AD astfel încât unghiul diedru format de semiplanele care conțin triunghiurile $\triangle ABD$ și $\triangle ACD$ să aibă măsura de 120° . Să se determine:
 - a) măsura $\sphericalangle BAC$ după îndoire; (5p) (nota 9)
 - b) tangenta unghiului format de planele (ABC) și (DBC) ; (5p) (nota 9)
 - c) distanța de la punctul D la planul (ABC) . (5p) (nota 9)
3. Pătratul $ABCD$ și triunghiul echilateral EBC sunt incluse în plane diferite. Determinați tangenta unghiului format de planele (ABC) și (EBC) știind că $\sphericalangle(EC, (ABC)) = 30^\circ$. (10p) (nota 10)

Timp de lucru: 2 ore; se acordă 10 puncte din oficiu.

19. Perimetrul secțiunii axiale a unui con circular drept cu înălțimea de 12 cm este egal cu 48 cm. Aflați generatoarea și raza conului. (nota 9)

20. Înălțimea unui con circular drept este de 60 cm, iar suma dintre lungimea generatoarei și a razei este de 1 m. Aflați:

a) raza și generatoarea conului;

b) lungimile proiecțiilor înălțimii și razei conului pe o generatoare a sa. (nota 9)

21. Un trunchi de con are aria secțiunii axiale egală cu 432 cm^2 , înălțimea de 36 cm și diferența razelor de 4 cm. Determinați lungimile razelor bazelor trunchiului și a generatoarei acestuia. (nota 10)

22. Secțiunea axială a unui trunchi de con este un trapez isoscel ortodiagonal (are diagonalele perpendiculare) cu aria de 576 cm^2 . Dacă generatoarea conului este egală cu 26 cm, aflați înălțimea și razele trunchiului de con. (nota 10)

II. 2. Piramida triunghiulară regulată. Tetraedrul regulat. Probleme rezolvate

Fig. 136

Desfășurarea piramidei triunghiulare regulate (fig. 136 a și 136 b)

$$a = R\sqrt{3}; A_b = \frac{a^2\sqrt{3}}{4};$$

$$A_l = \frac{P_b \cdot a_p}{2}; A_l = A_l + A_b; h$$

$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} \text{ (fig. 137).}$$

Fig. 137

REZULTATE, INDICAȚII, SOLUȚII, COMENTARIU

ALGEBRĂ. CAPITOLUL I. Recapitulare și aprofundare. Numere reale

I. 1. $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Probleme de recunoaștere a numerelor naturale, întregi, raționale, iraționale.

1. a) 0,625; 0,28; 0,024; 0,0125; 0,075; 0,08(3); b) 0,(03); 0,(025641); 0,(571428); 0,4375; 0,22; 0,(6); c) 1,1(6); 0,0625; 1,(285714); 0,15625; 0,14(6). 2. a) \mathbb{Z} ; b) \mathbb{N} ; c) \mathbb{N} ; d) \mathbb{Q} ; e) \mathbb{Z}^* ; f) \mathbb{N} ; g) \mathbb{R} ; h) \mathbb{Q} ; i) \mathbb{Z} ; j) \emptyset ; k) \mathbb{Z} ; l) \emptyset ; m) \emptyset . 3. a), b), c), h) periodică simplă; d), e), g), j) periodică mixtă; f), i) un număr finit de zecimale.

4. a) $\frac{9}{5}; \frac{63}{20}; \frac{9}{20}; \frac{10}{3}; -\frac{60}{11}; \frac{5}{37}; \frac{7}{6}$; b) $\frac{131}{90}; \frac{1001}{900}$; $\frac{617}{4995}; -\frac{9}{50}; \frac{31}{6}$; c) $\frac{41631}{9990}; \frac{712}{225}; -\frac{11}{9}; \frac{211}{900}$; d) $\frac{45}{11}; 2\frac{7}{60}; 1\frac{11}{12}; 3\frac{3}{16}$. 5. a) 3; b) 7; c) 1. 6. M = {7; 9; 20; 10^7 }; P = {-6; 9; 7; -10; 20; 10^7 ; -3^8 };

T = {1,3(6); -1,5; -3,1(6); -6; 9,7; $-\frac{3}{5}; \frac{7}{6}$; 7,167; -4,(15); -10; 20; 10^7 ; -3^8 }; S = { $\sqrt{3}$; $-\sqrt{5}$; π ;

$-3\sqrt{2}$; $5\sqrt{6}$; $-\pi$; $\sqrt{11}$; $-\sqrt{2}$ }. 7. a) A; b) A; c) F; d) A; e) A; f) A; g) A; h) F; i) A; j) F; k) A; l) A.

8. $D_{12} = \{-12; -6; -4; -3; -2; -1; 1; 2; 3; 4; 6; 12\}$; $D_8 = \{-8; -4; -2; -1; 1; 2; 4; 8\}$; $D_{14} = \{-14; -7; 7; 14\}$.

9. A = {5, 6, 8, 12}; B = {1, 2, 4, 5, 8, 13}; C = {-2}; D = {5, 9} $\frac{x+2}{x-1} \in \mathbb{N} \Rightarrow x-1 | x+2 \Rightarrow x-1 | (x+2) - (x-1) + 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow x-1 | 3 \Rightarrow x-1 \in \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow E = \{2, 4\}$; F = {0, 2}; $\frac{x(x+1)}{2x+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2x+1 | x^2+x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1 | 2x^2+2x \Rightarrow 2x+1 | x(2x+1)+x \Rightarrow 2x+1 | x \Rightarrow 2x+1 | 2x+1/2x \Rightarrow 2x+1 | (2x+1) - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x+1 | 1 \Rightarrow 2x+1 \in \{-1, 1\} \Rightarrow G = \{0; -1\}$; H = {(-6, 1), (6, -1), (-2, 3), (3, -2), (1, -6), (2, -3), (-3, 2),

(-1, 6)}; I = {-4, -2, -1, 1}. 10. a) 21; b) 31; c) 123; d) 1,5; e) 2,5; f) 1,01; g) $\frac{5}{7}$; h) $\frac{13}{15}$; i) $1\frac{11}{13}$; j) $\frac{5}{4}$;

k) $\frac{31}{12}$; l) $2\frac{9}{13}$. 11. $(x, y) \in \{(2, 5), (5, 6), (8, 9)\}$. 12. a) Presupunem că $\sqrt{6} \in \mathbb{Q}$. Putem scrie $\sqrt{6} = \frac{m}{n}$,

unde $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$. Avem: $6 = \frac{m^2}{n^2} \Rightarrow 6n^2 = m^2 \Rightarrow 2/m^2, 2 \text{ prim} \Rightarrow 2/m \Rightarrow m = 2k (k \in \mathbb{N}^*)$ și,

deci $6n^2 = 4k^2 \Rightarrow 3n^2 = 2k^2 \Rightarrow 2/n$, contradicție; b) $5n+2$ și $5n+3$ nu sunt pătrate perfecte oricare ar fi $n \in \mathbb{N}$; c) Produsul $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 100$ se divide cu 97 și nu se divide cu 97^2 , deci nu este pătrat perfect etc.;

d) Ultima cifră a numărului $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot 2000 + 2$ este 2, deci nu este pătrat perfect. 13. a) Presupunem prin

absurd că $\sqrt{5} + 3 = r, r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - 3 \in \mathbb{Q}$, contradicție; d) Presupunem prin absurd că $\sqrt{5} + \sqrt{3} =$

$= r, r \in \mathbb{Q}$, rezultă $\sqrt{5} = r - \sqrt{3} \Rightarrow 5 = r^2 - 2r\sqrt{3} + 3 \Rightarrow \sqrt{3} = \frac{r^2 - 2}{2r} \in \mathbb{Q}$, contradicție;

f) $\sqrt{29+12\sqrt{5}} = \sqrt{(3+2\sqrt{5})^2} = 3 + 2\sqrt{5}$. 14. a) $[-5, 16] = -6$; $\{-5, 16\} = 0,84$; b) $[3, 14] = 3$; $\{3, 14\} = 0,14$;

c) $[4, (7)] = 4$; $\{4, (7)\} = \frac{7}{9}$; d) $\left[\frac{10}{4}\right] = 2$; $\left\{\frac{10}{4}\right\} = \frac{1}{2}$; e) $\left[-5\frac{4}{5}\right] = -6$; $\left\{-5\frac{4}{5}\right\} = \frac{1}{5}$; f) $\left[-\frac{9}{4}\right] = -3$;

$\left\{-\frac{9}{4}\right\} = \frac{3}{4}$; g) $\left[\frac{2n+3}{2n+4}\right] = 0$; $\left\{\frac{2n+3}{2n+4}\right\} = \frac{2n+3}{2n+4}$; h) $\frac{3n+5}{3n+4} = 1 + \frac{1}{3n+4}$ etc; i) $4 < \sqrt{17} < 5$, deci

$[\sqrt{17}] = 4$ și $\{\sqrt{17}\} = \sqrt{17} - 4$; j) $[\sqrt{7} - 2] = 0$; $\{\sqrt{7} - 2\} = \sqrt{7} - 2$; k) $[\sqrt{13} - 4] = -1$; $\{\sqrt{13} - 4\} = \sqrt{13} - 3$.

15. a) $\sqrt{2013+2(1+2+3+\dots+2012)} = \sqrt{2013+1 \cdot \frac{2012 \cdot 2013}{2}} = \sqrt{2013+2012 \cdot 2013} = \sqrt{2013^2} = 2013 \in \mathbb{Z}$,

deci propoziția este adevărată; b) $\sqrt{343^2 - (336^2 + 7 \cdot 336)} = \sqrt{343^2 - 336 \cdot 343} = \sqrt{343 \cdot 7} = \sqrt{7^4} = 7^2 \in \mathbb{Q}$, deci

propoziția este adevărată; c) $\sqrt{\frac{1}{10 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 12} + \frac{1}{12 \cdot 13} + \dots + \frac{1}{99 \cdot 100}} = \sqrt{\frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} + \frac{1}{12} - \frac{1}{13} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100}} =$

$$A = \{n \in \mathbb{Z} / n = 12k + 1, k \in \mathbb{Z}\}.$$

9. $A = \{1; 2; 3; 6\}$; $B = \{1; 2; 3; 6\}$; $C = \{3; 7; 9; 37\}$. 10. $\frac{6n+2020}{2n+3} = \frac{6n+9+2011}{2n+3} =$

$$= \frac{3(2n+3)+2011}{2n+3} = 3 + \frac{2011}{2n+3} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n+3 / 2011 \Rightarrow 2n+3 \in \{-2011; -1; 1; 2011\} \Rightarrow M = \{-1007;$$

$$-2; -1; 1004\}.$$
 11. $P = \{1; 2; 3; 4\}$. 12. $A = \{-12; -11; -10; -9; -8; 8; 9; 10; 11; 12\}$.

13. $\frac{x+6}{9} \in \mathbb{Z} \Rightarrow x+6 = 9k, k \in \mathbb{Z}. |x| \leq 3 \Rightarrow x \in \{\pm 3; \pm 2; \pm 1; 0\}$. Se obține $x = 3$, soluție, deci $A = \{3\}$.

14. $\{1; 5; 9; 13; 17; 21\} \subseteq A$; $\{3; 8; 13; 18; 23; 28\} \subseteq B$; $\{-11; -4; 3; 10; 17; 27\} \subseteq C$.

15. Notăm $|x-2| = a. \frac{5+a}{3-a} \in \mathbb{Z} \Rightarrow a-3 / a+5 \Rightarrow a-3 / (a-3) + 8 \Rightarrow a-3 / 8 \Rightarrow a-3 \in \{-8; -4; -2;$

$$-1; 1; 2; 4; 8\} \Rightarrow a \in \{-5; -1; 1; 2; 4; 5; 7; 11\} \Rightarrow |x-2| \in \{1; 2; 4; 5; 7; 11\}$$
 deoarece $|x-2| \geq 0$ etc.

16. $B = \{0; 1; 2; 4; 10\}$; $C = \{0; 2\}$; $D = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ etc. 17. $B = \{3\}$, $A = \mathbb{Z} \setminus (\mathbb{N} \setminus \{1; 2\})$.

II. 2. Intervale numerice și reprezentarea lor pe axa numerelor. Proprietățile relației de inegalitate (ordine în \mathbb{R})

1. a) $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$; b) Există o infinitate de numere: $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots; \frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{7}, \dots$ etc.; c) $\sqrt{\frac{1}{2}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{5}}, \dots;$

$$\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{5}}, \sqrt{\frac{2}{7}}, \dots$$
 etc. Există o infinitate de numere iraționale cuprinse între 0 și 1. *Mulțimea numerelor reale este densă.*

2. a) A; b) F; c) F; d) A; e) A; f) A; g) A; h) A; i) F; j) A; k) A; l) A. 3. a) $[-\sqrt{2}; 10]$; b) $(3; +\infty)$;

c) $(-\infty; 0)$; d) $(0; +\infty)$; e) $(-\infty; 2)$; f) $(-4; 3]$. 4. $A = [-2; 3]$; $B = [2; 5]$; $C = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$; $D = [1; +\infty)$;

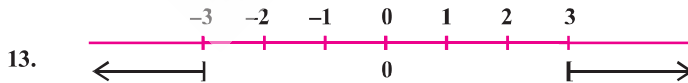
$E = [4; +\infty)$; $F = (-\infty; -4]$; $G = [1,5; 3,5]$; $H = (-\sqrt{5}; \sqrt{5}]$; $I = (-2,5); -1,(8)$. 5. $B = \{0; 1; 2\}$; $C = \{-2; -1; 0; 1; 2\}$ etc. 6. a) și h) segment; b), c), f) și i) semidrepte; d), e) reuniuni de semidrepte; g) mulțimea vidă.

II. 3. Operații cu intervale de numere reale. Reuniunea. Intersecția. Diferența și incluziunea intervalelor (extinderi)

1. a) A; b) F; c) A; d) A; e) A; f) F; g) A. 2. $[-2; 7]$, $B = (-3; 0)$, $C = (-\infty; 3)$, $D = [2; +\infty)$.

3. a) $[-2; 5]$; b) $(-2; 2]$; c) $[-2; 7]$; d) $[-2; 2]$; e) $(-3; 0)$; f) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2\}$. 4. a) $(1; 3)$; b) $[-4; 8]$; c) $[-3; -2]$; d) \mathbb{R} ; e) $(-\infty; 0)$; f) $[-3; +\infty)$; g) $[-2; 3]$; h) $[0; 2)$; i) $[1; 3]$; j) $[-5; -3]$; k) $(-\infty; -7)$; l) \emptyset .

5. $\{2\sqrt{2}; \sqrt{5}\}$. 6. a) $[-5; 5]$; b) 6; c) 10; d) $m \notin A \Rightarrow m < -5$ sau $m > 5$, deci $-m < -5$ sau $-m > 5$, adică $-m \notin A$. 7. a) A; b) F; c) A; d) A. 8. -1. 9. $x = -2, y = 0$. 10. a) $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; b) $\{1\}$; c) $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$; d) $\{1; 2\}$. 11. Din relația 1° rezultă $a = 4$ și $b \geq 6$. Relația 2° implică $b \leq 10$. Deci $a = 4$ și $b = 10$. 12. $A = [-3; 3]$, $B = (-2; 6)$, $C = [-6; 2]$.



14. $A = [-5; 5]$, $B = (-1; 5]$, $C = [-5,5; -0,5]$, $D = (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, $E = (-\infty; -1,5] \cup [3,5; +\infty)$,

$F = (-\infty; -\sqrt{5}-3) \cup (3-\sqrt{5}; +\infty)$. 15. $\sqrt{(4x+3)^2} = 5 \Leftrightarrow |4x+3| = 5 \Leftrightarrow 4x+3 \in \{-5; 5\}$. Cum $x \in \mathbb{Z}$

rezultă $x = -2$. Deci $A = \{-2\}$. $B = \left\{-\frac{13}{2}; -\frac{7}{2}\right\}$. $C = \{0\}$. 16. $|-x+2| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq x-2 \leq 3 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq$

$$\leq 5 \Leftrightarrow A = [-1; 5]. \frac{6x+5}{3} < 2 \Leftrightarrow 6x+5 < 6 \Leftrightarrow x < \frac{1}{6} \Leftrightarrow x \in \left(-\infty; \frac{1}{6}\right). A \cup B = (-\infty; 5]; A \cap B =$$

i) $(2x - 3 + 3x)(2x - 3 - 3x) = (5x - 3)(-x - 3)$; **j)** $(5x + x^2 - 2x)(5x - x^2 + 2x) = (x^2 + 3x)(-x^2 + 7x) = x^2(x + 3)(-x + 7)$; **k)** $\left(\frac{2}{3}x + \frac{7}{10}y^2\right)\left(\frac{2}{3}x - \frac{7}{10}y^2\right)$; **l)** $\left(\frac{12}{5}x - 7y^2\right)\left(\frac{12}{5}x + 7y^2\right)$; **m)** $(3x - 1 + 3 - x) \cdot (3x - 1 - 3 + x) = (2x + 2)(4x - 4)$; **n)** $(2x + 1 + x^2 - 2x)(2x + 1 - x^2 + 2x) = (x^2 + 1)(-x^2 + 4x + 1)$;
o) $(3x + 1 + y^2 - 4y)(3x + 1 - y^2 + 4y)$. **5. a)** $(x^2 - 1)(x^2 + 1) = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$; **b)** $(x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$; **c)** $(x^2 - 4)(x^2 + 4) = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4)$; **d)** $(9 - y^2)(9 + y^2) = (3 - y)(3 + y)(9 + y^2)$;
e) $(4x^2 - 25)(4x^2 + 25) = (2x - 5)(2x + 5)(4x^2 + 25)$; **f)** $(9x^2 - 100)(9x^2 + 100) = (3x - 10)(3x + 10)(9x^2 + 100)$;
g) $(25x^2 - 9y^2)(25x^2 + 9y^2) = (5x - 3y)(5x + 3y)(25x^2 + 9y^2)$; **h)** $(a^4 - b^4)(a^4 + b^4) = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2)(a^4 + b^4)$. **6. a)** $(x - y)(x + y)$; **b)** $(m - 7)(7 + m)$; **c)** $(7 + 3x)(7 - 3x)$;
d) $(5 + x)(5 - x)$; **e)** $\left(\frac{9}{8} + a\right)\left(\frac{9}{8} - a\right)$; **f)** $\left(\frac{5}{6}x + \frac{6}{7}y^2\right)\left(\frac{5}{6}x - \frac{6}{7}y^2\right)$; **g)** $(\sqrt{5}x + \sqrt{3})(\sqrt{5}x - \sqrt{3})$;
h) $(\sqrt{3} + x)(\sqrt{3} - x)$; **i)** $(10p + 9)(10p - 9)$; **j)** $\left(\frac{11}{8}x + 5y^2\right)\left(\frac{11}{8}x - 5y^2\right)$. **7. a)** $(x - 3 + 5)(x - 3 - 5) = (x + 2)(x - 8)$; **b)** $3(x - 1)(5x - 3)$; **c)** $-3(4x - 1)(2x + 3)$; **d)** $(5x + 1)(x - 5)$; **e)** $(x^2 - x + 5)(-x^2 + 5x + 5)$;
f) $-x^2(x + 2)(x - 8)$. **8. a)** $[x - y + 3(a + b)]^2 = (x - y + 3a + 3b)^2$; **b)** $[(x + 5) - (y + 7)]^2 = (x - y - 2)^2$;
c) $\left[(x - \sqrt{3}y) - 3(x + \sqrt{3}y)\right]^2 = (x - \sqrt{3}y - 3x - 3\sqrt{3}y)^2 = (-2x - 4\sqrt{3}y)^2 = 4(x + 2\sqrt{3}y)^2$.

III. 3.4. Restrângerea ca pătrat.

1. a) $-10x$ sau $10x$; **b)** 9 ; **c)** $9x^2$; **d)** $-4x^2$ sau $4x^2$; **e)** $9y^2$; **f)** $12x^2$; **g)** $\frac{1}{9}$; **h)** 9 ; **i)** $\frac{1}{49}$; **j)** $\frac{9}{4}$.

2. a) $(m + 1)^2$; **b)** $(t - 1)^2$; **c)** $(a - 2b)^2$; **d)** $(xy + 1)^2$; **e)** $a^2 - a + \frac{1}{4} = a^2 - 2 \cdot a \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(a - \frac{1}{2}\right)^2$;

f) $\frac{1}{9} - \frac{2}{3}x + x^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x + x^2 = \left(\frac{1}{3} - x\right)^2$; **g)** $(2 - xz)^2$; **h)** $(x^2 + 3)^2$; **i)** $(5y - 4)^2$.

3. a) $(x + 8)^2$; **b)** $(x - \sqrt{2})^2$; **c)** $(\sqrt{3}x + 5)^2$; **d)** $(4 - 3x)^2$; **e)** $(2x - 5y)^2$; **f)** $(\sqrt{5}x + \sqrt{2})^2$; **g)** $(a - \sqrt{7})^2$;

h) $(2x^2 - \sqrt{3}y)^2$; **i)** $\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2$. **4. a)** $(2x + 3y + 2)^2$; **b)** $[(x - 1) - (y + 2)]^2 = (x - y - 3)^2$; **c)** $[(a^2 + b^2 + c^2) - 3c^2]^2 = (a^2 + b^2 - 2c^2)^2$; **d)** $(a^2 + 2b^2 + 1)^2$. **5. a)** $(x + \sqrt{3})^2$; **b)** $(x - \sqrt{11})^2$; **c)** $(y - 2\sqrt{3})^2$;

d) $(2\sqrt{3}x + 1)^2$; **e)** $(a - 10)^2$; **f)** $(b - 3)^2$; **g)** $(5a + x + 3)^2$; **h)** $(x - 1 + x + 1)^2 = 4x^2$; **i)** $[4(2x - 3) - 3y]^2 = 8x - 3y - 12$; **j)** $[a + \sqrt{3}b - (a - \sqrt{3}b)]^2 = (2\sqrt{3}b)^2 = 12b^2$.

III. 3.5. $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac = (a + b + c)^2$ (extinderi).

1. a) $(a - b - c)^2$; **b)** $(3a - b - 2c)^2$; **c)** $(a\sqrt{2} - b\sqrt{3} + c\sqrt{5})^2$; **d)** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2)^2 + x^2 + 1^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + 2 \cdot x^2 \cdot 1 - 2x \cdot 1 = (x^2 - x + 1)^2$. **Altă soluție:** $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = (x^2)^2 - 2 \cdot x^2 \cdot x + x^2 + 2 \cdot 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 - x)^2 + 2(x^2 - x) + 1 = (x^2 - x + 1)^2$; **e)** $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = 4x^4 + 9x^2 + 1 - 12x^3 - 4x^2 + 6x = (2x^2)^2 + (3x)^2 + 1^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x - 2 \cdot 2x^2 \cdot 1 + 2 \cdot 3x \cdot 1 = (2x^2 - 3x - 1)^2$.

Observație: La rezolvarea exercițiilor de acest tip mulți rezolvători optează pentru soluția bazată pe restrângerea succesivă ca pătrat al unei sume de doi termeni: $4x^4 - 12x^3 + 5x^2 + 6x + 1 = (2x^2)^2 - 2 \cdot 2x^2 \cdot 3x + (3x)^2 - 4x^2 + 6x + 1 = (2x^2 - 3x)^2 - 2(2x^2 - 3x) + 1 = [(2x^2 - 3x) - 1]^2 = (2x^2 - 3x - 1)^2$ (**vezi și a doua soluție la d)**; **f)** $(3x^2 - x + 1)^2$. **2. a)** $(x + 2y + 5z)^2$; **b)** $(5x + 3y + 2)^2$; **c)** $(x - a + 3)^2$; **d)** $(10x + 3y^2 - 1)^2$;

e) $(x - y + 2)^2$; **f)** $(\sqrt{2}x - \sqrt{3}a + \sqrt{6})^2$; **g)** $(\sqrt{5}x - 2y - \sqrt{2})^2$; **h)** $(x^2 - x + 1)^2$.

V. 3. Funcții de forma $f: D \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = ax + b$, unde a și b sunt numere reale și D este o mulțime finită de numere reale sau un interval nedegenerat ($D \neq \emptyset$); interpretare geometrică; lecturi grafice.

2. A, B, D, F. **3.** A, B, C, D, E, F $\in G_f$. **8. a), b), c), d)** Toate graficele conțin originea sistemului de coordonate; **e)** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = -\frac{\sqrt{6}}{2}x$. **10.** Graficele funcțiilor sunt drepte paralele. **11.** $m = 14$.

12. a) $a^2 - 2 = 14 \Rightarrow a \in \{-4; 4\}$. **13. a)** $A(2; 2)$; **b)** $A\left(\frac{3}{5}; \frac{3}{5}\right)$; **c)** orice punct de pe dreapta care este reprezentarea grafică a funcției; **d)** $A\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right)$; **e)** $A(9; 9)$; **f)** $A\left(-\frac{13}{15}; -\frac{13}{15}\right)$; **g)** $A(-17; -17)$; **h)** nu există;

i) $A(-6; -6)$; **j)** nu există. **14. a)** $A(-3; -3)$, **b)** $B(1; 5)$; **c)** $C(\sqrt{3}; 2\sqrt{3} + 3)$; $D(-1; 1)$; $E\left(-\frac{9}{5}; -\frac{3}{5}\right)$.

15. $A \in G_f \Rightarrow (m+3)m + m - 2 = 3 \Leftrightarrow m^2 + 4m - 5 = 0 \Leftrightarrow m^2 - m + 5m - 5 = 0 \Leftrightarrow (m-1)(m+5) = 0 \Leftrightarrow m \in \{-5; 1\}$. **16. a)** $A \in G_f \Rightarrow 2(a-2) + \frac{a+1}{3} = 2 \Rightarrow a = \frac{17}{7}$; **b)** $a = \frac{16}{5}$; **c)** $a \neq 2$.

17. a) $A \in G_f \Rightarrow f(0) = -3 \Rightarrow b = -3$. $B \in G_f \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow a + b = 0$. Deci $a = 3$ și $f(x) = 3x - 3$;

b) $f(x) = \frac{2}{3}x + 2$; **c)** $-\frac{\sqrt{6}}{2}x + \sqrt{3}$. **18. a)** $f(x) = -x$; **b)** $f(x) = 3x$; **c)** $f(x) = -x$; **d)** $f(x) = -\frac{1}{3}x$;

e) $f(x) = 0$; **f)** $f(x) = 0$. **19. a)** $A(1; 0)$; $B(0; -1)$; **b)** $A\left(-\frac{5}{4}; 0\right)$; $B(0; 5)$; **c)** $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $B(0; 2)$;

d) $A\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}; 0\right)$; $B(0; 2)$; **e)** $A\left(\frac{2}{3}; 0\right)$; $B\left(0; \frac{1}{3}\right)$; **f)** $A\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}; 0\right)$; $B(0; -1)$. **20. a)** -1 ; **b)** $\frac{3}{2}$; **c)** 0 ; **d)** $m = 1$;

e) $\frac{1}{2}$. **21. a)** $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$; **b)** $f(x) = -\frac{3}{2}x - 3$; **c)** $f(x) = x + 3$; **d)** $f(x) = \frac{1}{5}x + \frac{13}{5}$; **e)** $f(x) = \sqrt{3}x - 1$.

22. a) $A \in G_f \Rightarrow (1) -2a + b = -2$. $B \in G_f \Rightarrow (2) a + b = 3$. Din (1) și (2) rezultă $a = \frac{5}{3}$ și $b = \frac{4}{3}$. Deci

$f(x) = \frac{5}{3}x + \frac{4}{3}$; **b)** $f(x) = 2$; **c)** $f(x) = -4x - 7$; **d)** $f(x) = -x + 2$; **e)** $f(x) = x - 3$; **f)** $f(x) = x$. **23. a)** $\frac{7}{9}$; **b)** 1 ;

c) -4 ; **d)** $\frac{1}{2}$. **24.** $f(1) = a + 2 + b - 2 = 4 \Leftrightarrow (1) a + b = 4$. $f(-1) = -a - 2 + b - 2 = -2 \Leftrightarrow (2) -a + b = 2$. Din

(1) și (2) rezultă $a = 1$, $b = 3$. Deci $f(x) = 3x + 1$. **25. a)** $M(0; 3)$; **b)** $M\left(\frac{6}{5}; \frac{9}{5}\right)$; **c)** $M(5; 5)$; **d)** $M\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}; -1\right)$;

e) $M\left(-\frac{6}{5}; \frac{8}{5}\right)$; **f)** $M(-8; -3)$. **26. a)** $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2x - 3 = -\frac{1}{2}x + 7 \Leftrightarrow$

$x = 4$ și $f(4) = 5$. $G_f \cap G_g = \{M\}$, unde $M(4, 5)$; **b)** $AM = \frac{5\sqrt{5}}{2}$;

$MB = 5\sqrt{5}$ și $AB = \frac{25}{2}$ etc. (**fig. 180**). **27.** $A \in G_f \cap G_g \Leftrightarrow m^2 - 4 = 5$

și $\frac{2}{3}m + m = 5$, de unde rezultă $m = 3$.

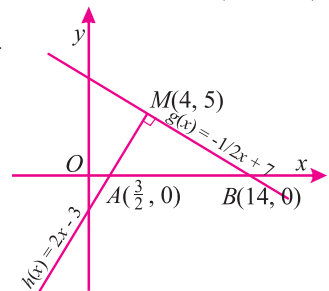


Fig. 180

b), c) - raționament analog. **9. a)** $A'C' \parallel AC, AC \perp BD$ etc. **c)** Segmentul $D'O$ este mediană în triunghiul $\triangle ACD'$ echilateral, deci este și înălțime și cum $A'C' \parallel AC$, rezultă $D'O \perp A'C'$.

10. a) $GH \parallel AD$ și $AD \perp BF \Rightarrow GH \perp BF$ etc.

I. 4.3. Dreaptă paralelă cu un plan

1. 1). adevărate: **c).** **2).** **c).** **3.** Nu! **4. a), b), c)** este paralelă cu planul; **d), e)** - înțepă planul. **5.** $CD \parallel AB, AB \subset \alpha \Rightarrow CD \parallel \alpha$. **6. a)** Segmentele $A'F$ și BE sunt congruente și sunt incluse în drepte paralele, deci $BEFA'$ paralelogram, ceea ce implică $EF \parallel A'B$ și cum $A'B \subset (ABB')$, rezultă $EF \parallel (ABB')$.

b) $AF \subset (ADD')$; **c)** FC înțepă planul $(AA'B)$; **d)** Se arată că în patrulaterul $AEC'F$ laturile opuse sunt congruente două câte două etc. $AF \parallel (BB'C)$. **7. a)** $EF \parallel (ABC)$; **b)** $NP \parallel (ACF)$; **c)** $MN \parallel AB, AB \parallel EF$, deci $MN \parallel EF$; $MN \parallel (EFC)$; **d)** înțepă planul; **e)** $BE \subset (AFP)$. **8. a)** $MN \parallel (ADC)$; **b)** $BC \parallel (MNP)$; **c)** MN înțepă planul (ABC) . **9. b** „înțepă” planul α . Se demonstrează prin reducere la absurd.

10. $m \parallel \alpha$ sau $b \subset \alpha$. Se demonstrează prin reducere la absurd. **11. a) i)** Segmentul OL este linie mijlocie în $\triangle ACF$, deci $OL \parallel AF$ și cum $AF \subset (ABE)$, rezultă că $OL \parallel (ABE)$

(fig. 201). **ii)** Segmentul OL este linie mijlocie în $\triangle BDG$ etc.

b) dreapta OL înțepă planul (ADE) .

12. Există o infinitate de drepte paralele.

13. Existența. Printr-un punct al dreptei g se duce dreapta h , paralelă la d . Planul determinat de dreptele h și g este paralel la d .

Unicitatea. Se demonstrează prin reducere la absurd.

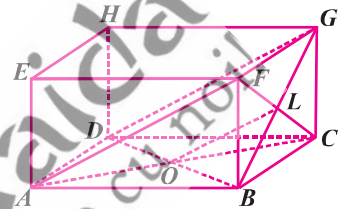


Fig. 201

14. Fie α planul determinat de dreptele a și b și O punctul în care acestea se intersectează. Presupunem prin absurd că d nu înțepă planul α . Atunci $d \subset \alpha$ sau $d \parallel \alpha$. **1.** Dacă $d \subset \alpha$, se obține că în α există două perpendiculare distincte pe d care conțin punctul O , ceea ce este absurd.

2. Dacă $d \parallel \alpha$, se construiește printr-un punct al planului α , dreapta g paralelă cu d . Rezultă că $g \subset \alpha$ și $g \perp \alpha, g \perp b$ și problema se reduce la cazul 1.

I. 4.4. Plane paralele, aplicații. Teorema lui Thales în spațiu (extinderi)

2. a) Da. **b)** Nu, dați un contraexemplu. **3.** a înțepă planul β . Reducere la absurd. **4.** $b \subset \alpha$ sau $b \parallel \alpha$.

Reducere la absurd. **5. b)** paralele. **6. a)** Fețele paralelipipedului dreptunghic sunt dreptunghiuri.

i) $AB \parallel A'B'$ și $BC \parallel B'C'$ implică $(ABC) \parallel (A'B'C')$ și cum $(A'B'C') = (A'D'C')$, rezultă $(ABC) \parallel (A'D'C')$;

ii), iii) - analog cu **a).** **b)** - paralele. **8.** $(A'B'D'), (D'DC), (D'DB), (D'AB), (D'BC), (D'AC)$.

10. a) $AC \parallel A'C, B'C \parallel A'D$ etc. **11. a)** $BM \parallel AN$ și $BC \parallel AD \Rightarrow (BMC) \parallel (AND)$. **b)** Nu. Dacă ar fi

paralele ar rezulta că dreptele MN și DC sunt coplanare, absurd. **12.** Se arată că $MN \parallel DC$ și MN nu este

congruent cu DC și rezultă că $MNDC$ este trapez, deci DN și CM sunt concurente. $(AND) \cap (BCM) = EF$,

unde $E \in AD \cap BC$ și $F \in DN \cap CM$. **13.** Punctele M, N, P aparțin intersecției planelor (ABC) și (DEF)

deci sunt coliniare. Dreapta MN și punctul O determină planul (OMN) și cum $P \in MN$, rezultă că

O, M, N, P sunt puncte coplanare. **14. a)** Dreptele concurente AB și AE din planul (ABE) sunt paralele

respectiv cu DC și DF . **b)** Reducere la absurd. Dacă BE și CF nu ar fi paralele, atunci, fiind coplanare, ar

avea un punct comun și ar rezulta că planele (ABE) și (CDF) au un punct comun, absurd.

c) Fie $AD \cap BC = \{G\}$ și $AD \cap EF = \{H\}$. Cum $H, G \in \alpha$ iar AD nu poate avea decât un punct comun

cu α , rezultă $G = H$.

15. Fie $d = (ABC) \cap \alpha$. Se arată că $d \parallel BC$ și $MN \parallel BC$ și rezultă $MN \parallel d \Rightarrow MN \parallel \alpha$. **16.** Fie P mijlocul

segmentului AD (fig. 202). Demonstrați că punctele M, P, N sunt necoliniare și că $(MNP) \parallel \alpha$.

17. Se aplică teorema: „Dacă un plan intersectează două plane paralele, intersecțiile sunt drepte

paralele.” Analizați două cazuri: **1)** A aparține segmentului BC ; **2)** B aparține segmentului AC .

18. a) Se arată că patrulaterul $BMGN$ este paralelogram și rezultă $BM \parallel GN$. Cum $AB \parallel HG$, rezultă că

$(ABM) \parallel (NGH)$. **b)** Fie $NP \perp BM, P \in BM$. (fig. 203) Se arată că $NP \perp (ABM)$ și rezultă că distanța

dintre planele (ABM) și (NGH) este egală cu lungimea segmentului NP . Se constată că $BCM N$ este pătrat

și se obține $NP = 2\sqrt{2}$ cm.

(fig. 207). Generatoarea conului = $VA = 15$ cm și $VO = \frac{AB\sqrt{3}}{2} = 7,5\sqrt{3}$ cm. $O'B' \parallel OB \Rightarrow \Delta VO'B' \sim \Delta VOB$ (t.f.a.) $\Rightarrow \frac{VO'}{VO} = \frac{O'B'}{OB} = \frac{VB'}{VB} \Rightarrow \frac{2}{7,5} = \frac{VB'}{15} \Rightarrow VB' = 4$ cm. $BB' = VB - VB' = 15 - 4 = 11$ cm.
 $VO' = \frac{2}{7,5} \cdot 7,5\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ cm. $OO' = VO - VO' = 7,5\sqrt{3} - 2\sqrt{3} = 5,5\sqrt{3}$ cm.

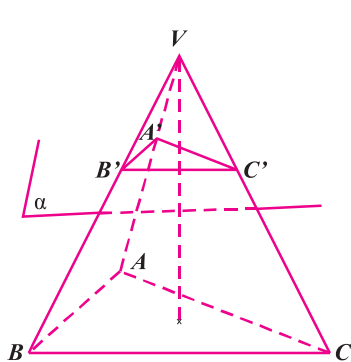


Fig. 205

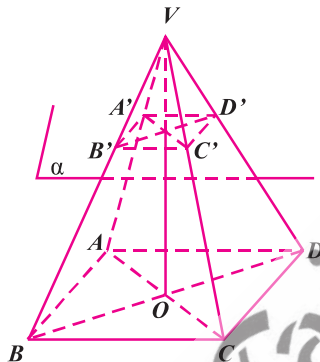


Fig. 206

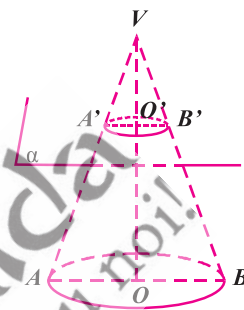


Fig. 207

I. 5.1. Perpendicularitate; drepte perpendiculare, dreapta perpendiculară pe un plan, aplicații: distanța de la un punct la un plan; înălțimea unei piramide, înălțimea unui con circular drept

- $AB = 6$ cm; $PM = \sqrt{91}$ cm; $PB = PC = 10$ cm. 2. $PA = PC = 5$ cm; $PB = \sqrt{41}$ cm; $PO = \sqrt{17}$ cm.
- Din $MA \perp \alpha$ și $AB, AC \subset \alpha$ rezultă $MA \perp AB$ și $MA \perp AC$. a) $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (C.C) implică $MB = MC$. b) $\Delta MAB \equiv \Delta MAC$ (I.C.) implică $AB = AC$. 4. a) i) $ABB'A'$ și $ADD'A'$ sunt dreptunghiuri, deci avem $AA' \perp AB$ și $AA' \perp AD$ și cum dreptele AB și AD sunt concurente și sunt incluse în planul (BCD) , rezultă $AA' \perp (BCD)$. ii) iii) și iv) se demonstrează analog. b) Într-un paralelipiped dreptunghic dreapta-suport a fiecărei muchii este perpendiculară pe planele fețelor pe care le intersectează.
- $HE \perp (GHL)$, deci $HE \perp LG$; b) analog cu a); c) $HL \perp (JK)$ și $MN \subset (JK)$ implică relația cerută.
- a) $BB' \perp (ABC)$ implică $BB' \perp AC$, adică $AC \perp BB'$ și cum $AC \perp BD$ ($ABCD$ este pătrat), rezultă $AC \perp (B'D'D)$. b) Avem: $B'D' \perp A'C'$ ($A'B'C'D'$ este pătrat) și $B'D' \perp CC'$ (deoarece $CC' \perp (B'D'C')$) ceea ce implică $B'D' \perp (A'C'C)$ etc. 7. $MA \perp (ABC) \Rightarrow MA \perp DC, MA \perp BC, MA \perp BD$. a) $CD \perp AD$ și $CD \perp MA \Rightarrow CD \perp (MAD)$; b) $BC \perp AB$ și $BC \perp MA \Rightarrow BC \perp (MAB)$; c) $BD \perp AC$ și $BD \perp MA \Rightarrow BD \perp (MAC) \Rightarrow BD \perp MC$; d) Din $DC \perp (MAD)$ și $AP \subset (MAD)$ rezultă $DC \perp AP$. $AP \perp DC$ și $AP \perp MD \Rightarrow AP \perp (MCD)$. 8. a) $CD \perp (MAD)$ (vezi problema 7), deci $d(C, (MAD)) = CD = 2$ cm;
- Se arată că $BD \perp (MAC)$. $d(B, (MAC)) = BO$, unde $\{O\} = AC \cap BD$ și cum $BO = \frac{BD}{2} = \sqrt{2}$ cm,

rezultă că $d(B, (MAC)) = \sqrt{2}$ cm. c) $d(A, (MCD)) = AP$, unde P este proiecția punctului A pe MD (vezi problema 7). Cu teorema lui Pitagora și teorema a doua a înălțimii, din ΔMAD se obține $AP = 1,2$ cm.

- Cu reciproca teoremei lui Pitagora se arată că $AB \perp AC$ și $AB \perp AD$, de unde rezultă $AB \perp (ACD)$ etc.
- a) Rezultă din $AB \perp (BCC')$ și $B'C \subset (BCC')$. b) $B'C \perp BC'$ ($BCC'B'$ - pătrat) și $B'C \perp AB$ implică $B'C \perp (ABC)$. c) Rezultă din b). 11. MO este mediană în triunghiurile isoscele MAC și MBD . Rezultă $MO \perp AC$ și $MO \perp BD$ etc. 12. a) $AC \perp AB$ și $AC \perp AD \Rightarrow AC \perp (ABD) \Rightarrow AC \perp BD$. b) $AB \perp DC$ și $AB \perp AC \Rightarrow AB \perp (ADC) \Rightarrow AB \perp AD \Rightarrow \sphericalangle BAD = 90^\circ$. 13. Fie $P \in AB$ astfel încât $PA \equiv PB$. Avem $MP \perp AB$ și $NP \perp AB$, deci $d \perp (MNP)$ de unde $d \perp g$. 14. Fie $AA' \perp \alpha, BB' \perp \alpha, A', B' \in \alpha$. Rezultă că $AA' \parallel BB'$, deci punctele A, B, A', B' sunt coplanare și $(AA'B) \cap \alpha = A'B'$. Dacă $AB \parallel \alpha$, rezultă $A'B' \parallel AB$ și cum $AA' \parallel BB'$, se obține că $AA'B'B$ este paralelogram, deci $AA' \equiv BB'$. Reciproc, dacă $AA' \equiv BB'$, rezultă că $AA'B'B$ este paralelogram, deci $AB \parallel A'B'$ și, prin urmare, $AB \parallel \alpha$. 15. Fie $AB \cap \alpha = \{M\}$.

II. 6. Prisma dreaptă cu baza un pătrat (patrulatere regulată).

1. **a)** $h = 11$; $\mathcal{A}_\ell = 132$; $\mathcal{V} = 99$; $d = \sqrt{139}$; **b)** $a = 9$; $\mathcal{A}_\ell = 342$; $\mathcal{V} = 405$; $d = \sqrt{187}$; **c)** $a = 5$; $\mathcal{A}_\ell = 200$; $\mathcal{A}_t = 250$; $d = 5\sqrt{6}$; **d)** $h = 2,5\sqrt{2}$, $\mathcal{A}_\ell = 40\sqrt{2}$, $\mathcal{A}_t = 8(5\sqrt{2} + 4)$; $d = \frac{\sqrt{178}}{2}$; **e)** $a = \frac{5\sqrt{2}}{2}$;

$\mathcal{A}_\ell = 120\sqrt{2}$; $\mathcal{A}_t = 5(24\sqrt{2} + 5)$; $V = 150$; **f)** $A_t = 4\sqrt{6}$; $A_t = 2(2\sqrt{6} + 3)$; $V = 3\sqrt{2}$; $d = 2\sqrt{2}$.

2. $A_t = 32(\sqrt{161} + 4)$ cm²; $V = 64\sqrt{161}$ cm³. **3.** $A_t = 100\sqrt{6}$ cm²; $V = 375\sqrt{2}$ cm³. **4.** $A_t = 80\sqrt{138}$ cm²; $V = 400\sqrt{69}$ cm³. **5.** $A_t = 360\sqrt{2}$ cm²; $A_t = 90(4\sqrt{2} + 5)$ cm²; $V = 1350\sqrt{2}$ cm³.

6. **a)** $BC = 6$ cm; $d^2 = 6^2 + 6^2 + 8^2 = 136$, de unde $d = 2\sqrt{34}$ cm;

b) $\mathcal{V} = 6^2 \cdot 8 = 288$ cm³.

7. $BD = BB' = 10\sqrt{2}$ cm = h . $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 40 \cdot 10\sqrt{2} = 400\sqrt{2}$ cm².

$\mathcal{V} = 100 \cdot 10\sqrt{2} = 1000\sqrt{2}$ cm³.

8. Fie $A'C' \cap B'D' = \{O'\}$ (fig. 271). Cu T.3.⊥ se obține $AO' \perp B'D'$, deci $d(A, B'D') = AO' = 12$ cm. Cum $AC = 12\sqrt{2}$ cm, rezultă că $A'O' = 6\sqrt{2}$ cm. În $\triangle AA'O'$ cu teorema lui Pitagora se obține $AA'^2 = 144 - 72 = 72$. Deci $AA' = 6\sqrt{2}$ cm = h .

a) $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 12 \cdot 4 \cdot 6\sqrt{2} = 288\sqrt{2}$ cm²;

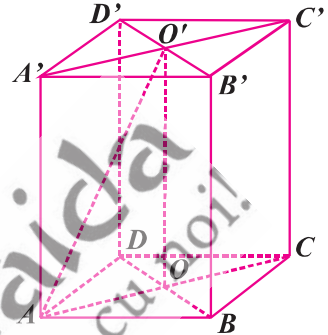


Fig. 271

b) $BD'^2 = 12^2 + 12^2 + (6\sqrt{2})^2 = 360$, de unde $BD' = 6\sqrt{10}$ cm; **c)** $\mathcal{V} = \mathcal{A}_\ell \cdot h = 864\sqrt{2}$ cm³;

d) $\mathcal{A}_{BDD'B'} = BD \cdot DD' = 144$ cm². **9. a)** $\text{pr}_{(BCB')} DB' = B'C$ și $\angle DB'C = 30^\circ$. Deci $DB' = CD \cdot 2 = 4a$.

$DB'^2 = 4a^2 + 4a^2 + h^2 = 16a^2$, de unde $AA' = h = 2\sqrt{2} a$; **b)** $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 16\sqrt{2} a^2$; **c)** $\mathcal{V} = 8\sqrt{2} a^3$;

d) Fie $AC \cap BD = \{O\}$. Se arată cu T.3.⊥, că $A'O \perp BD$. Dacă $AP \perp A'O$, $P \in A'O$, atunci $d(A, (BDA')) = AP$ etc. **10.** $\triangle A'FD' \cong \triangle C'FD'$ (C.C.) $\Rightarrow A'F \cong C'F$. Se arată că $AA' = 16$ cm. $V = 1024$ cm³.

11. Volumul cărămizilor dintr-un metru cub de zidărie este 0,6144 m³; al mortarului, 0,3856 m³, ceea ce reprezintă 38,56% din volumul zidului. **12. a)** V interior al lăzii = $1 \cdot 1 \cdot 0,5 = 0,5$ m³ = 500 l; **b)** volumul exterior = $1,05 \cdot 1,05 \cdot 0,55 = 0,606375$ m³. $m = V \cdot \rho = 0,106375 \cdot 750 = 79,78125$ kg.

II. 7. Cubul.

1. **a)** Fie a lungimea muchiei cubului. Avem $a\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \Rightarrow a = 6$ cm; **d)** $a\sqrt{3} = 2x - 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}(2x-1)}{3}$. Se obține: $S = 2(2x-1)^2$ și $V = \frac{\sqrt{3}(2x-1)^3}{9}$, unde $x \in \mathbb{R}$ cu $x > \frac{1}{2}$.

2. **a)** Muchia bazei are 6 cm; **b)** $A_t = 6 \cdot 6^2 = 216$ cm²; **c)** $d = 6\sqrt{3}$ cm; **d)** $\mathcal{V} = 216$ cm³. **3. a)** 12 cm;

b) $\mathcal{A}_\ell = P_b \cdot h = 4 \cdot 12 \cdot 12 = 576$ cm²; **c)** $\mathcal{V} = 12^3 = 1728$ cm³. **4. a)** $AC = EF \cdot 2 = 40\sqrt{2}$ cm = $AB\sqrt{2}$,

de unde $AB = 40$ cm. $A_t = 6 \cdot AB^2 = 6 \cdot 40^2 = 9600$ cm²; **b)** $\mathcal{A}_{BDB'} = \frac{\mathcal{A}_{BDD'B'}}{2} = \frac{BD \cdot BB'}{2} = \frac{40\sqrt{2} \cdot 40}{2} =$

$= 800\sqrt{2}$ cm²; **c)** $d = 40\sqrt{3}$ cm. **5. a)** Avem: $AB \cdot AB\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$, de unde $AB = 8$ cm. $\mathcal{A}_\ell = 8 \cdot 4 \cdot 8 =$

$= 256$ cm²; **b)** $d = 8\sqrt{3}$ cm; **c)** $\mathcal{V} = 8^3 = 512$ cm³. **7.** Muchia cubului are 10 cm. $A_t = 600$ cm²; $V = 1000$ cm³.

8. Muchia are lungimea de 24 cm. $V = 13824$ cm³; $A_t = 2304$ cm²; $A_t = 3456$ cm².

9. $6a^2 = a^3 \Rightarrow a = 6$ cm etc. $A_t = 216$ cm²; $V = 216$ cm³. **10.** $3\sqrt{3}$.

11. Fie a lungimea muchiei cubului. Avem $a\sqrt{3} - a\sqrt{2} = \frac{15\sqrt{3} - 15\sqrt{2}}{2}$, de unde rezultă $a = 7,5$ m.

$A_t = 337,5$ cm²; $V = 421,875$ cm³. **12.** $V = \frac{1024\sqrt{2}}{27}$ cm³; $A_t = \frac{256}{3}$ cm². **13.** $d = 6\sqrt{129}$.

14. $V = 2744 \text{ cm}^3$; $A_t = 1176 \text{ cm}^2$. 15. În $\triangle ADC'$, cu $\sphericalangle ADC' = 90^\circ$ și $DP \perp AC'$, P aparține segmentului AC' , conform **teoremei catetei** avem $AP = \frac{AD^2}{AC'} \Rightarrow \frac{AP}{AC'} = \left(\frac{AD}{AC'}\right)^2 = \left(\frac{a}{a\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$. 16. a) 125 cm^3 și 150 cm^2 ;

b) 5 cm și $5\sqrt{2} \text{ cm}$; c) $d(A, D'B') = AO'$, unde $\{O\} = A'C' \cap B'D'$. $AO' = \frac{a\sqrt{6}}{2}$; d) Fie $AP \perp A'B'$.

Se arată că AP este perpendiculară pe planul dreptunghiului $BCD'A'$. $d(A, (A'D'C)) = AP = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ cm}$.

17. Dacă notăm cu a, b, c dimensiunile paralelipipedului, relația din enunț conduce la: $2ab + 2ac + 2bc = a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + c^2 + a^2 \Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = c$, adică paralelipipedul este cub.

18. $\mathcal{A}_\ell = 4 \cdot \ell^2 = 4 \cdot 4,5^2 = 81 \text{ m}^2$. 90% din tabla repartizată = 81 m^2 , de unde rezultă că suprafața tablei

repartizate = $81 : \frac{90}{100} = 90 \text{ m}^2$ (fig. 272); b) Volumul vasului = $4,5^3 =$

$= 91,125 \text{ m}^3 = 91125 \text{ l}$. În $\triangle ACC'$ obținut după desfășurarea suprafeței laterale a cubului, furnica de deplasează pe ipotenuza AC' .

Avem $AC'^2 = 9^2 + 4,5^2 = 101,25 \text{ m}$. Cum $101,25 \text{ m} > 400 : 4$, rezultă că furnica nu ajunge în punctul C' în 400 de minute.

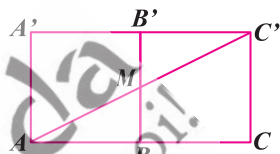


Fig. 272

II. 8. Paralelipipedul dreptunghic.

1. $A_t = 2 \cdot (5 \cdot 12 + 5 \cdot 13 + 12 \cdot 13) = 562 \text{ cm}^2$. $d = \sqrt{5^2 + 12^2 + 13^2} = 13\sqrt{2} \text{ cm}$. $V = 780 \text{ cm}^3$.

2. a) $2 \cdot (6 + 8) = 28 \text{ cm}^2$; b) $A_t = P_b \cdot h = 28 \cdot 10 = 280 \text{ cm}^2$; c) $d = \sqrt{6^2 + 8^2 + 10^2} = 10\sqrt{2} \text{ cm}$;

d) $V = 6 \cdot 8 \cdot 10 = 480 \text{ cm}^3$. 3. $A_t = A_t - 2 \cdot A_b = 200 \text{ cm}^2 - 80 \text{ cm}^2 \cdot 2 = 40 \text{ cm}^2$.

4. $A_b = \frac{A_t - A_t}{2} = \frac{240 - 120}{2} = 60 \text{ cm}^2$. 5. a) $2 \cdot (9 + 12) = 42 \text{ cm}$; b) 4 cm ; c) $2 \cdot (9 \cdot 12 + 9 \cdot 4 + 12 \cdot 4) =$

$= 384 \text{ cm}^2$. 6. a) $A_b = 16 \cdot 8 = 128 \text{ cm}^2$; b) $d = 24 \text{ cm}$; c) $V = 2048 \text{ cm}^3$. 7. a) $AB = \sqrt{BA'^2 - AA'^2} = 5 \text{ cm}$;

b) $AD = \sqrt{144 \cdot 2 - 144} = 12 \text{ cm}$; c) $A_t = 2 \cdot (12^2 + 125 + 125) = 528 \text{ cm}^2$; d) $V = 60 \cdot 12 = 720 \text{ cm}^3$.

8. $129,6 \text{ hl}$. 9. Înălțimea are 4 cm etc. $d = \sqrt{185} \text{ cm}$. 10. Dimensiunile sunt: 24 cm ; 32 cm și 40 cm etc.

a) $d = 40\sqrt{2} \text{ cm}$; b) $A_t = 6016 \text{ cm}^2$; c) $V = 30,72 \text{ dm}^3$. 11. $A_t = 3218 \text{ cm}^2$; $V = 12180 \text{ cm}^3$. 12. Fie a, b, c

dimensiunile paralelipipedului. Avem $\frac{a}{4,5} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = k$, de unde $a = 4,5k$; $b = 6k$ și $c = 8k$. Se obține:

$4,5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot k^3 = 12^3$, de unde $k = 2$ și $a = 9$, $b = 12$, $c = 16$. 13. Dimensiunile paralelipipedului sunt: 70 cm ,

72 cm și 74 cm . $d = 2\sqrt{3890}$; $A_t = 31096 \text{ cm}^2$; $V = 372,96 \text{ dm}^3$. 14. Fie a, b, c dimensiunile paralelipipe-

dului. Avem: $\frac{ac+bc}{17,5} = \frac{ab+bc}{16} = \frac{ab+ac}{13,5} = \frac{94}{47} = 2 \Rightarrow \begin{cases} ac+bc=35 \\ ab+bc=32 \\ ab+ac=27 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab=12 \\ ac=15 \\ bc=20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=4 \\ c=5 \end{cases}$, $V = 60 \text{ m}^3$;

$d = 5\sqrt{2} \text{ m}$. 15. $V = 960\sqrt{34} \text{ cm}^3$. 16. Fie $CM \perp BD'$ și $AN \perp BD'$ ($N \in BD'$). Din **teorema catetei**

în triunghiurile dreptunghice BCD' și ABD' se obține $\frac{18}{BO'} - \frac{12}{BD'} = 1$, de unde $BD' = 6 \text{ cm}$ etc.

$A_t = 12(\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}) \text{ cm}^2$; $V = 36 \text{ cm}^3$.

17. a) $\triangle ACC'$ este dreptunghic isoscel, deci $CC' = AC = 20 \text{ cm}$; b) $AC' = 20\sqrt{2} \text{ cm}$;

c) $V = (10\sqrt{2})^2 \cdot 20 = 4000 \text{ cm}^3$.