

PETRU ROTARU

DETERMINANȚI MICȘTI

Probleme de matematica pentru liceu

Ediția a II-a



Editura TAIDA

- IAȘI, 2020 -

Motivația

Sunt câteva fapte care motivează conținutul acestei lucrări. Le vom evidenția în cele ce urmează.

① Formulă pentru $\det(A+B)$

Mulțimea de matrice $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ($n \geq 2$) împreună cu adunarea și înmulțirea de matrice, respectiv înmulțirea cu scalari este o \mathbb{C} -algebră.

Se cunosc următoarele proprietăți ale determinanților:

- 1) $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$ (A din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și α din \mathbb{C});
- 2) $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ (A și B din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$) – formula lui Cauchy-Binet.

Fie $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ matrice din $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ și fie $N = \{1, 2, \dots, n\}$

Pentru un k din N avem:

$$(*) \prod_{j \in N} (a_{jk} + b_{jk}) = \sum_{J \subseteq N} \prod_{j \in J} a_{jk} \cdot \prod_{j \in N-J} b_{jk}, \text{ cu } \prod_{j \in \emptyset} a_{jk} = 1 = \prod_{j \in \emptyset} b_{jk}$$

Acum

$$\det(A+B) = \sum_{p \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{j \in N} (a_{jp(j)} + b_{jp(j)}) \stackrel{(*)}{=} \sum_{J \subseteq N} \sum_{p \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(p) \cdot \prod_{j \in J} a_{jp(j)} \cdot \prod_{j \in N-J} b_{jp(j)}$$

(am permutat sumele) = $\sum_{J \subseteq N} \det \begin{pmatrix} A/J \\ \dots\dots\dots \\ B/N-J \end{pmatrix}$ (sumă de 2^n determinanți), unde

$\begin{pmatrix} A/J \\ \dots\dots\dots \\ B/N-J \end{pmatrix}$ este matricea ce conține liniile $(a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jn})$ din A ($j \in J$)

și liniile $(b_{k1}, b_{k2}, \dots, b_{kn})$ din B ($k \in N-J$).

Pentru $n=2$ avem:

$$\begin{vmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Determinanți micști

Considerăm matricele $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ cu elemente din mulțimea \mathbb{C} și în legătură cu aceste două matrice, luăm matricele $A/B = \begin{pmatrix} a & b \\ z & t \end{pmatrix}$ și $B/A = \begin{pmatrix} x & y \\ c & d \end{pmatrix}$ pe care le numim **matrice mixte** și le citim: „matricea A și B ”, respectiv „matricea B și A ” (sau „matricea A pe B ”, respectiv „matricea B pe A ”) iar determinanții acestor matrice îi numim **determinanți micști. Proprietățile numărului** $(\det A/B + \det B/A)$ (o sumă de doi determinanți micști) vor fi puse în evidență în continuare de următoarea

Propoziție. Au loc următoarele relații:

$$\boxed{1} \quad \det(A+B) = \det A + \det B + (\det A/B + \det B/A), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

$$\boxed{2} \quad \det(\alpha \cdot A + \beta \cdot B) = \alpha^2 \det A + \beta^2 \det B + \alpha\beta(\det A/B + \det B/A), \\ \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

Demonstrație:

Într-adevăr, folosind proprietăți ale determinanților, avem:

$$\det(A+B) = \begin{vmatrix} a+x & b+y \\ c+z & d+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c+z & d+t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ c+z & d+t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & b \\ z & t \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & y \\ z & t \end{vmatrix} = \det A + \det B + (\det A/B + \det B/A).$$

Acum vom demonstra și [2]. Avem, conform [1]:

$$\det(\alpha A + \beta B) = \det(\alpha A) + \det(\beta B) + (\det \alpha A / \beta B + \det \beta B / \alpha A), \text{ dar}$$

$$(\det \alpha A / \beta B + \det \beta B / \alpha A) = \begin{vmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \beta z & \beta t \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \beta x & \beta y \\ \alpha c & \alpha d \end{vmatrix} = \alpha\beta \begin{vmatrix} a & b \\ z & t \end{vmatrix} + \alpha\beta \begin{vmatrix} x & y \\ c & d \end{vmatrix} \text{ și}$$

atunci obținem:

$$\det(\alpha A + \beta B) = \alpha^2 \det A + \beta^2 \det B + \alpha\beta(\det A/B + \det B/A), \text{ adică [2].}$$

Observație:

Considerăm în continuare că sunt cunoscute proprietățile determinațiilor.

În formula [2] particularizăm $\alpha = 1$, $\beta = -1$ și obținem:

$$[3] \quad \det(A - B) = \det A + \det B - (\det A/B + \det B/A), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C});$$

din identitățile [1] și [3] rezultă imediat că:

$$[4] \quad \det(A + B) + \det(A - B) = 2(\det A + \det B), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}), \text{ dar}$$

și:

$$[5] \quad \det(A + B) - \det(A - B) = 2(\det A/B + \det B/A), \quad \forall A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Observație:

Identitățile [1], [2], [3] și [5] pot fi considerate ca formule care oferă expresii pentru $(\det A/B + \det B/A)$.

În calculul expresiei $(\det A/B + \det B/A)$ particularizăm matricea B : luăm $B = I_2$, apoi: $B = A$, respectiv $B = O_2$, și obținem succesiv:

$$[6] \quad \det A/I_2 + \det I_2/A = \text{tr}A; \quad \det A/A + \det A/A = 2 \det A;$$

$$\det A/O_2 + \det O_2/A = 0 \quad \text{unde} \quad \text{tr}A = a + d \text{ (urma matricei } A),$$

proprietățile urmei le considerăm cunoscute.

Demonstrația formulelor din [6] este imediată. Considerăm acum și:

$$[7] \quad \det \alpha A / \beta B + \det \beta B / \alpha A = \alpha\beta(\det A/B + \det B/A), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \text{ și}$$

$$A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

Probleme

P.1. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că:

$$\det(A+B) = \det A + \det B \Leftrightarrow \det(A-B) = \det A + \det B$$

Petru Rotaru

P.2. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$. Demonstrați că:

$$\det(A+B) = \det A + \det B \Leftrightarrow \det(A+B) = \det(A-B)$$

Petru Rotaru

P.3. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ și $\det A + \det B = 0$. Demonstrați că:

$$\det(A+B) + \det(A-B) = 0. \text{ Reciproca este adevărată?}$$

Petru Rotaru

P.4. Dacă $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, atunci: $\det(A^2 + B^2) \geq \det(AB - BA)$

C:2748, G.M.

P.5. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că:

$$\det(A^2 + B^2) / (\det(AB - BA) + \det(AB - BA) / (A^2 + B^2)) = 0$$

Petru Rotaru

P.6. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Demonstrați că:

$$\det(A^2 + B^2) - \det(AB - BA) = (\det A - \det B)^2 + (\det A/B + \det B/A)^2$$

Petru Rotaru

P.7. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $AB = BA$. Demonstrați că:

$$\det(A^2 - B^2) = (\det A + \det B)^2 - (\det A/B + \det B/A)^2$$

Petru Rotaru

P.8. Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, cu $AB = BA$. Demonstrați că:

$$\det(A^2 - B^2) \leq (\det A + \det B)^2$$

Petru Rotaru

P.303. Aplicând lema celor două polinoame, polinoamelor $f = x^2 + x + 1$ și $g = z^n - 1$, $n \in \mathbb{N}^*$, demonștrați că:

$$\left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{n}\right) \left(1 + 2 \cos \frac{4\pi}{n}\right) \cdots \left(1 + 2 \cos \frac{(2n-2)\pi}{n}\right) = \begin{cases} 0, & n = 3\ell \\ (-1)^{n+1}, & n = 3\ell \pm 1, \ell \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

Petru Rotaru

P.304. Fie $A, B, C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ trei matrice cu proprietatea $\det C \neq 0$. Folosind identitățile: $(A+B)C = AC + BC$; $(A-B)C = AC - BC$; $(A+iB)C = AC + iBC$ și $(A-iB)C = AC - iBC$, $i^2 = -1$, în care se trece la determinanți, demonștrați că: $d_{n-k} A C B C = (\det C) \cdot d_{n-k} A B$ oricare ar fi n și k numere naturale cu proprietățile: $7 \geq n \geq 2$ și $0 < k < n$

Petru Rotaru

P.305. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C})$, atunci:

$$d_{2 \ 1} A + B C = d_{2 \ 1} A C + d_{2 \ 1} B C + d_{1 \ 1 \ 1} A B C$$

Petru Rotaru

P.306. Dacă $A, B, C \in \mathcal{M}_4(\mathbb{C})$, atunci:

$$a) d_{3 \ 1} A + B C = d_{3 \ 1} A C + d_{3 \ 1} B C + d_{2 \ 1 \ 1} A B C + d_{1 \ 2 \ 1} A B C$$

$$b) d_{2 \ 2} A + B C = d_{2 \ 2} A C + d_{2 \ 2} B C + d_{1 \ 1 \ 2} A B C$$

$$c) d_{1 \ 3} A + B C = d_{1 \ 3} A C + d_{1 \ 3} B C$$

Petru Rotaru

Soluții

P.1. Folosind [1], relația: $\det(A+B) = \det A + \det B$ este echivalentă cu: $\det A + \det B + (\det A/B + \det B/A) = \det A + \det B$ sau cu: $\det A/B + \det B/A = 0$, care, prin intermediul formulei [3] este echivalentă cu: $\det(A-B) = \det A + \det B$.

P.2. Folosind [1], relația: $\det(A+B) = \det A + \det B$ este echivalentă cu: $\det A + \det B + (\det A/B + \det B/A) = \det A + \det B$ sau cu: $\det A/B + \det B/A = 0$ care, prin intermediul formulei [5] este echivalentă cu: $\det(A+B) = \det(A-B)$.

P.3. Din [1] avem $\det A/B + \det B/A = \det(A+B) - \det A - \det B$, din [3] avem $\det A/B + \det B/A = \det A + \det B - \det(A-B)$, de unde rezultă că $\det(A+B) - \det A - \det B = \det A + \det B - \det(A-B)$ și ținând cont de ipoteză, obținem $\det(A+B) = -\det(A-B)$. Este evident că are loc și reciproca.

Observație: P.3. se poate enunța și astfel: „Se dau matricele $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ unde matricea B este matricea A în care s-au schimbat două linii (coloane) între ele. Demonstrați că: $\det(A+B) + \det(A-B) = 0$ ”.

P.4. Avem identitatea: $(A-iB)(A+iB) = A^2 + B^2 + i(AB-BA)$, trecând aici la determinanți, obținem: $\det(A-iB) \cdot \det(A+iB) = \det(A^2 + B^2 + i(AB-BA))$ și acum, folosim [2], rezultă: $[\det A + i^2 \det B - i(\det A/B + \det B/A)][\det A + i^2 \det B + i(\det A/B + \det B/A)] = \det(A^2 + B^2) + i^2 \cdot \det(AB-BA) + i(\det(A^2 + B^2)/(AB-BA) + \det(AB-BA)/(A^2 + B^2))$ sau: $(\det A - \det B)^2 + (\det A/B + \det B/A)^2 = \det(A^2 + B^2) - \det(AB-BA) + i(\det(A^2 + B^2)/(AB-BA) + \det(AB-BA)/(A^2 + B^2))$, cum $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

$$1 + z_k^2 = 1 + \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{n} + i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} = 2 \cos^2 \frac{(2k+1)\pi}{n} +$$

$$+ 2i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} = 2 \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} \left[\cos \frac{(2k+1)\pi}{n} +$$

$$+ i \sin \frac{(2k+1)\pi}{n} \right] \text{ și atunci: produsul din stânga, pentru (1), devine:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + z_k^2) = 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \cos \frac{5\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} \cdot$$

$$\cdot \left[\cos \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{1+3+5+\dots+(2n-1)\pi}{n} \right] =$$

$$= 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} [\cos n\pi + i \sin n\pi], \text{ adică am găsit:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (1 + z_k^2) = 2^n \cos \frac{\pi}{n} \cos \frac{3\pi}{n} \dots \cos \frac{(2n-1)\pi}{n} \cdot \cos n\pi \quad (2).$$

Acum:

$$\prod_{h=1}^2 \left((x_h)^n + 1 \right) = \left[(i)^n + 1 \right] \left[(-i)^n + 1 \right] = 1^n + i^n + (-i)^n + 1 = \begin{cases} 4, & n = 4\ell \\ 2, & n = 4\ell \pm 1 \\ 0, & n = 4\ell = 2 \end{cases}$$

$\ell \in \mathbb{N}^*$. Venind cu ultimul rezultat și cu (2) în (1), obținem identitatea dorită.

P.303. Polinomul $f = X^2 + X + 1$ are rădăcinile $x_1 = \varepsilon$ și $x_2 = \bar{\varepsilon}$ cu $x_1 + x_2 = -1$ și $x_1 x_2 = 1$ și $x_1^3 = x_2^3 = 1$, iar polinomul $g = Z^n - 1$ are

$$z_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}, \quad k = \overline{0, n-1}, \text{ atunci din lemă:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} f(z_k) = (-1)^{2n} \prod_{h=1}^2 g(x_h), \text{ adică } \prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) = \prod_{h=1}^2 \left[(x_h)^n - 1 \right] \quad (1).$$

Pentru (1) calculăm, pe rând, cele două produse:

$$1 + z_k + z_k^2 = 1 + \cos \frac{4k\pi}{n} + i \sin \frac{4k\pi}{n} + \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = 2 \cos^2 \frac{2k\pi}{n} +$$

$$+ \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} = \cos \frac{2k\pi}{n} \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) +$$

$$+i \sin \frac{2k\pi}{n} \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) = \left(2 \cos \frac{2k\pi}{n} + 1 \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right) =$$

$$= \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) z_k \text{ și atunci produsul din stânga, pentru (1), devine:}$$

$$\prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) = \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right) \cdot z_k = (-1)^{n+1} \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 + 2 \cos \frac{2k\pi}{n} \right), \text{ adică}$$

$$\text{am găsit: } (-1)^{n+1} \left(1 + 2 \cos \frac{2\pi}{n} \right) \left(1 + 2 \cos \frac{4\pi}{n} \right) \cdots \left(1 + 2 \cos \frac{2(n-1)\pi}{n} \right) =$$

$$= \prod_{k=0}^{n-1} (z_k^2 + z_k + 1) \quad (2).$$

$$\text{Acum: } \prod_{h=1}^2 ((x_h)^n - 1) = (\varepsilon^n - 1) \left((\bar{\varepsilon})^n - 1 \right) = (\varepsilon \bar{\varepsilon})^n - (\varepsilon)^n - (\bar{\varepsilon})^n + 1 =$$

$$= \begin{cases} 0, & n = 3\ell \\ 3, & n = 3\ell \pm 1 \end{cases}, \ell \in \mathbb{N}^* \text{ și, în final, cu (2) și (3) în (1), obținem identitatea}$$

dorită.



Editura Galaxia
 Succesul tău începe cu noi!

Cuprins

1. Argument	3
2. Introducere.....	4
3. Motivația	5
4. Determinanți micști	8
5. Polinomul caracteristic al unei matrice în raport cu altă matrice	41
6. Matrice K-diferite	56
7. Probleme	68
8. Soluții	111
9. Bibliografie	223



Editura Taida
Succesul tău începe cu noi!