Adrian ZANOSCHI
Gheorghe IUREA
Gabriel POPA

matematică

algebră
geometrie

clasa a VII-a

ediția a VI-a

mate 2000 – standard

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45

Acest auxiliar didactic este aprobat pentru utilizarea în unitățile de învățământ preuniversitar prin O.M.E.C. nr. 6250/21.12.2020.
Lucrarea este elaborată în conformitate cu Programa școlară în vigoare pentru clasa a VII-a, aprobată prin O.M.E.N. nr. 3393/28.02.2017.

Director de producție editorială: Ionuț Burcioiu

Redactare: Andreea Roșca, Ramona Rossall
Tehnoredactare: Carmen Rădulescu, Adriana Vlădescu
Pregătire de tipar: Marius Badea
Design copertă: Mirona Pintilie

Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României
ZANOSCHI, ADRIAN
Matematică : algebră, geometrie : clasa a VII-a / Adrian Zanoschi, Gheorghe Iurea, Gabriel Popa. – Ed. a 6-a. – Pitești : Paralela 45, 2025
ISBN 978-973-47-4309-4

I. Iurea, Gheorghe
II. Popa, Gabriel

51

Editura Paralela 45

Editura Paralela 45

Copyright © Editura Paralela 45, 2025
Prezenta lucrare folosește denumiri ce constituie mărci înregistrate, iar conținutul este protejat de legislația privind dreptul de proprietate intelectuală.
www.edituraparalela45.ro

PROBLEME RECAPITULATIVE
CLASA A VI-A

ARITMETICĂ

1. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 < 3x - 2 < 28\}$ și $B = \{y \in \mathbb{N} \mid y = n^2, n \in \mathbb{N}, n \leq 3\}$. Determinați $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ și $B \setminus A$.

2. Determinați mulțimile X și Y, știind că $X \cup Y = \{1, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$, $X \cap Y = \{5, 7, 9\}$ și $X \setminus Y = \{1, 10\}$.

3. Fie A și B două mulțimi, astfel încât card $A = 25$, card $B = 36$ și card$(A \cap B) = 20$. Aflați card$(A \cup B)$.

4. Fie mulțimea $A = \{1, 2, 3, 5, 7, 9\}$.

a) Scrieți toate submulțimile mulțimii A care au două elemente și suma acestora este număr impar.

b) Câte submulțimi cu cinci elemente are A?

c) Câte submulțimi are, în total, mulțimea A?

5. Descompuneți în factori primi numerele naturale: $a = 72$, $b = 75$, $c = 91$ și $d = 138$. Care dintre aceste numere are mai mulți divizori naturali?

6. Determinați cel mai mare număr natural n, astfel încât 5^n să dividă numărul $a = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 49 \cdot 50$.

7. Fie numerele naturale $a = 168$ și $b = 180$. Calculați cel mai mare divizor comun al numerelor a și b și cel mai mic multiplu comun al lor.

8. Aflați câți divizori comuni au numerele 126 și 420.

9. Numerele 248 și 107, împărțite la numărul natural nenul n, dau resturile 14, respectiv 17. Aflați numărul n.

10. Scrieți toți multiplii comuni ai numerelor 24 și 36 care sunt mai mici decât 300.

11. Aflați care este cel mai mic număr de elevi care se pot alinia în coloane de câte 8 elevi, de câte 12 elevi și de câte 18 elevi.

12. Ana are mai multe mere. Dacă le grupează câte trei sau câte patru, îi rămâne, de fiecare dată, câte un măr în plus. Dacă taie fiecare măr în patru, obține mai puțin de 100 de felii. Câte mere are Ana?

Editura Paralela 45

GEOMETRIE

1. Aflați măsura unui unghi, știind că măsura complementului său este un sfert din măsura suplementului său.

2. Se consideră un unghi AOB având măsura de $88°$. Fie OC semidreapta opusă semidreptei OA și OM, ON bisectoarele unghiurilor AOB, respectiv BOC.

a) Determinați măsura unghiului MON.

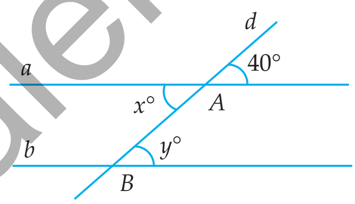
b) Stabiliți dacă OB este sau nu bisectoarea unghiului MON.

3. Se consideră unghiurile adiacente suplementare AOB și BOC. Fie OM bisectoarea unghiului AOB și $ON \perp OM$, $N \in \mathrm{Int}(\sphericalangle BOC)$. Arătați că ON este bisectoarea unghiului BOC.

4. Se consideră un unghi AOB având măsura de $60°$. Fie $OC \perp OA$, $OD \perp OB$ ($A \in \mathrm{Int}(\sphericalangle BOC)$ și $B \in \mathrm{Int}(\sphericalangle AOD)$), OM bisectoarea unghiului AOB și ON bisectoarea unghiului COD.

a) Aflați măsura unghiului COD.

b) Arătați că punctele M, O și N sunt coliniare.



5. În figura alăturată, dreapta d intersectează dreptele paralele a și b în punctele A, respectiv B. Determinați valoarea sumei $x° + y°$.

6. Fie un triunghi ABC și punctele $D \in AB$, $E \in AC$. Stabiliți dacă dreptele DE și BC sunt paralele, știind că:

a) $\sphericalangle DEB = \sphericalangle EBC$;

b) $\sphericalangle BDE = 152°$, $\sphericalangle DBC = 28°$;

c) $\sphericalangle ADE = 95°$, $\sphericalangle ABC = 85°$;

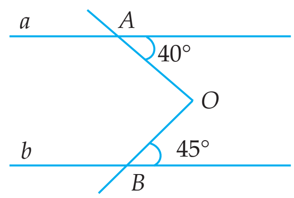
d) $\sphericalangle AED = \sphericalangle ACB$.

7. Fie dreptele a, b, c, d. Demonstrați că:

a) dacă $a \perp c$ și $b \perp c$, atunci $a \parallel b$;

b) dacă $a \parallel b$ și $c \perp a$, atunci $c \perp b$;

c) dacă $a \perp b$, $c \parallel a$ și $d \parallel b$, atunci $c \perp d$.



8. În figura alăturată, dreptele a și b sunt paralele. Aflați măsura unghiului AOB.

9. Fie M mijlocul segmentului AB și D simetricul unui punct C ($C \notin AB$) față de punctul M. Demonstrați că $AD \parallel BC$.

10. Fie un triunghi ABC și punctul $D \in BC$. Se știe că perimetrul triunghiului ABD este egal cu 27 cm, perimetrul triunghiului ACD este egal cu 43 cm și $AD = 10$ cm. Calculați perimetrul triunghiului ABC.

11. Determinați măsurile unghiurilor unui triunghi, știind că:

a) triunghiul este dreptunghic și are un unghi de $42°18'$;

b) triunghiul este isoscel și are un unghi de $53°42'$.

Editura Paralela 45

TESTE INIȚIALE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $6 - 12 : 3 - 4$ este:
A. –6 B. –2 C. 4 D. 0

(0,5p) **2.** Prețul unui calculator este 2800 lei. După o reducere cu 20%, prețul acestuia devine:
A. 2200 lei B. 2000 lei C. 2240 lei D. 2600 lei

(0,5p) **3.** Dacă $a \in \mathbb{Z}$ și $-9 < a + 1 < -7$, atunci a este egal cu:
A. –10 B. –9 C. –8 D. –7

(0,5p) **4.** Ioana a cumpărat de la magazin o pâine de 2,50 lei și 2 kg de cartofi de 2,40 lei kilogramul. Pentru cumpărăturile făcute, Ioana a plătit:
A. 4,90 lei B. 7,30 lei C. 7,50 lei D. 6,50 lei

(0,5p) **5.** Lungimea laturii unui triunghi echilateral cu perimetrul de 12,6 m este egală cu:
A. 4 m B. 12,6 m C. 6,3 m D. 4,2 m

(0,5p) **6.** Complementul unui unghi de 35° are măsura egală cu:
A. 55° B. 65° C. 90° D. 145°

(0,5p) **7.** Un triunghi isoscel are măsura unghiului opus bazei de 20°. Fiecare dintre unghiurile alăturate bazei sale are măsura de:
A. 20° B. 50° C. 70° D. 80°

(0,5p) **8.** Un triunghi dreptunghic are catetele egale cu 6 cm și 8 cm. Lungimea ipotenuzei triunghiului este egală cu:
A. 8 cm B. 9 cm C. 10 cm D. 14 cm

Partea a II-a. *La următoarele probleme se cer rezolvările complete.* (5 puncte)

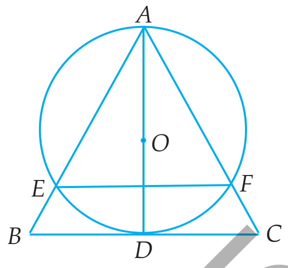
(1p) **1.** Rezolvați ecuația: $12 - 2(3x - 1) = -4$, $x \in \mathbb{Z}$.

(1p) **2.** Fie $a, b \in \mathbb{Q}^*$, astfel încât $\frac{3a+2b}{a+7b} = \frac{12}{23}$. Determinați valoarea raportului $\frac{a}{b}$.

(1p) **3.** Se consideră triunghiul isoscel ABC cu baza BC și $\sphericalangle A = 30°$. Dacă BD este înălțimea din B a triunghiului ABC ($D \in AC$), determinați măsura unghiului CBD.

Editura Paralela 45

4. În figura alăturată, ABC este un triunghi echilateral, D este mijlocul laturii BC, iar E și F sunt punctele în care cercul cu diametrul AD și centrul O intersectează laturile AB, respectiv AC.



(1p) a) Determinați măsura arcului mic $\overset{\frown}{AE}$ al cercului $\mathscr{C}(O)$ și arătați că cercul este tangent dreptei BC.

(1p) b) Arătați că dreptele BC și EF sunt paralele.

TESTUL 2

Partea I. *Scrieți doar litera corespunzătoare răspunsului corect.* (4 puncte)

(0,5p) **1.** Rezultatul calculului $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}$ este:

A. $\frac{2}{3}$ B. 1 C. $\frac{11}{12}$ D. $\frac{37}{36}$

(0,5p) **2.** Dacă $\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$, atunci numărul $3a-2b-1$ este egal cu:

A. 0 B. 1 C. –1 D. –2

(0,5p) **3.** Soluția ecuației $x:2+1=0$ este:

A. 4 B. $\frac{1}{2}$ C. –2 D. $-\frac{1}{2}$

(0,5p) **4.** Iulia rezolvă tema la matematică în jumătate de oră și tema la engleză într-un sfert de oră. În total, ea a lucrat la teme timp de:

A. 45 minute B. 60 minute C. 75 minute D. 90 minute

(0,5p) **5.** Diametrul unui cerc are lungimea de 4 cm. Raza acelui cerc are lungimea de:

A. 8 cm B. 1 cm C. 2 cm D. 16 cm

(0,5p) **6.** În jurul punctului O se formează unghiurile AOB, BOC, COD și DOA. Primele trei unghiuri au măsurile 30°, 150°, respectiv 72°. Măsura unghiului DOA este:

A. 118° B. 108° C. 98° D. 128°

(0,5p) **7.** Dacă $\Delta ABC \equiv \Delta MNP$ și $AC = 12$ cm, atunci lungimea segmentului MP este:

A. 2 cm B. 10 cm C. 12 cm D. 24 cm

(0,5p) **8.** În triunghiul dreptunghic ABC, AD este bisectoarea corespunzătoare ipotenuzei. Măsura unghiului DAC este:

A. 30° B. 45° C. 60° D. 90°

Editura Paralela 45

CAPITOLUL I
MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

Pătratul unui număr natural n este numărul $n^2 = n \cdot n$. Un număr de forma n^2, cu $n \in \mathbb{N}$, se numește **număr natural pătrat perfect**.

Exemple: $0 = 0^2$, $1 = 1^2$, $4 = 2^2$, $9 = 3^2$, $16 = 4^2$ etc. sunt numere naturale pătrate perfecte.

DEFINIȚIE: **Rădăcina pătrată** a unui număr natural pătrat perfect x (sau *radical* din x) este numărul natural y al cărui pătrat este x, adică $x = y^2$.

Pentru a desemna rădăcina pătrată folosim simbolul $\sqrt{\ }$.

Exemple: $\sqrt{0} = 0$; $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$ etc.

Observații:

1. $3 \underset{\text{rădăcină pătrată}}{\overset{\text{pătrat}}{\rightleftarrows}} 9$

2. Dacă $x, y \in \mathbb{N}$, atunci $\sqrt{x} = y \Leftrightarrow x = y^2$.

3. În mulțimea numerelor întregi ($\mathbb{Z}$) există două numere care ridicate la pătrat dau, de exemplu, 9, aceste numere fiind –3 și 3. Prin definiție, rădăcina pătrată a lui 9 este numărul pozitiv 3. Deci, $\sqrt{9} \neq -3$.

Vom prezenta, în continuare, **două metode de calcul a rădăcinii pătrate** a unui număr natural pătrat perfect.

M1. Descompunerea numărului considerat în factori primi

Exemple: 1) $1024 = 2^{10} = (2^5)^2 \Rightarrow \sqrt{1024} = 2^5 = 32$;

2) $13689 = 3^4 \cdot 13^2 = (3^2 \cdot 13)^2 \Rightarrow \sqrt{13689} = 3^2 \cdot 13 = 117$.

Editura Paralela 45

M2. Algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate

Pentru a ilustra metoda, vom calcula $\sqrt{18225}$.

I. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$

Despărțim numărul în grupe de câte două cifre, de la dreapta la stânga.

II. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$ | 1

$\underline{1}$

$=$

Căutăm cel mai mare număr natural al cărui pătrat este mai mic sau egal cu 1. Scriem acest număr, 1, în dreapta sus, iar pătratul său $1^2 = 1$ îl așezăm sub 1 (stânga) și efectuăm scăderea.

III. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$ | 1

$\underline{1}$ | 2

$=\ 8.2$

Coborâm, în stânga, grupa următoare (82) și despărțim ultima cifră cu un punct, iar în dreapta coborâm dublul lui 1, adică 2.

IV. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$ | 13

$\underline{1}$ | $\cancel{24 \cdot 4 = 96}$

$=\ 8.2$ | $23 \cdot 3 = 69$

$\underline{6\ 9}$

$1\ 3$

Împărțim pe 8 la 2, obținem câtul 4. Așezăm pe 4 la dreapta lui 2 și înmulțim numărul astfel format cu 4: $24 \cdot 4 = 96$. Cum $96 > 82$, reluăm operația anterioară cu predecesorul lui 4, care este 3: $23 \cdot 3 = 69 < 82$. Scriem 69 sub 82 (în stânga) și facem scăderea. Pe 3 îl scriem în dreapta sus, lângă 1.

V. $\sqrt{1 \mid 82 \mid 25}$ | 135

$\underline{1}$ | $\cancel{24 \cdot 4 = 96}$

$=\ 8.2$ | $23 \cdot 3 = 69$

$\underline{6\ 9}$ | $265 \cdot 5 = 1325$

$1\ 3\ 2.5$

$\underline{1\ 3\ 2\ 5}$

$= = = =$

Coborâm, în stânga, următoarea grupă și despărțim ultima cifră printr-un punct. În dreapta coborâm dublul lui 13 ($13 \cdot 2 = 26$). Numărul 26 se cuprinde în 132 de cinci ori. Trecem pe 5 în dreapta lui 26 și înmulțim rezultatul cu 5, astfel: $265 \cdot 5 = 1325$. Diferența din stânga este zero. Scriem în dreapta sus, lângă 13, pe 5.

Algoritmul este astfel încheiat, iar $\sqrt{18225} = 135$.

Editura Paralela 45

Probleme rezolvate

1. Calculați: $\sqrt{324}$, $\sqrt{5184}$ și $\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5}$.

Soluție: Vom descompune numerele de sub radicali în factori primi. Astfel, obținem:

$\sqrt{324} = \sqrt{2^2 \cdot 3^4} = \sqrt{(2 \cdot 3^2)^2} = 2 \cdot 3^2 = 18$,

$\sqrt{5184} = \sqrt{2^6 \cdot 3^4} = \sqrt{(2^3 \cdot 3^2)^2} = 2^3 \cdot 3^2 = 72$,

$\sqrt{10 \cdot 2^3 \cdot 5^5} = \sqrt{2^4 \cdot 5^6} = \sqrt{(2^2 \cdot 5^3)^2} = 2^2 \cdot 5^3 = 500$.

2. Determinați numărul natural n, știind că $n = \sqrt{16 \cdot 3^{10} + 3^{12}}$.

Soluție: Cum $16 \cdot 3^{10} + 3^{12} = 3^{10} \cdot (16 + 9) = 3^{10} \cdot 5^2 = (3^5 \cdot 5)^2$, rezultă că $n = 3^5 \cdot 5 = 1215$.

3. Determinați numărul natural x, știind că $\sqrt{2x+1} - 3 = 12$.

Soluție: Deoarece $\sqrt{2x+1} = 15$, înseamnă că $2x + 1 = 15^2$, deci $2x = 224$ sau $x = 112$.

4. Determinați cifrele a, b, x, y, pentru care $\sqrt{\overline{4ab}} = \overline{xy}$.

Soluție: Evident, dacă extragem radicalul din $\overline{4ab}$, obținem un număr de două cifre, cu prima cifră 2, deci $x = 2$. Deoarece $20^2 = 400$, $21^2 = 441$, $22^2 = 484$, iar $23^2 = 529$, rezultă că $a = b = 0$ și $y = 0$ sau $a = 4$, $b = 1$ și $y = 1$ sau $a = 8$, $b = 4$ și $y = 2$.

Probleme propuse

1. Determinați pătratele următoarelor numere naturale: 11, 12, 13, 14, 15, 20 și 160.

2. Ridicați la pătrat următoarele numere și scrieți de fiecare dată rezultatul ca produs de puteri ale unor numere prime: 2^5, $2^3 \cdot 3$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$, $3^{11} \cdot 5^7$, $2^n \cdot 7^{2n+1}$ ($n \in \mathbb{N}$).

3. Scrieți toate numerele naturale pătrate perfecte cuprinse între 200 și 500.

4. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) 25, 36, 81, 100, 900; b) 5^4, 2^6, 12^{10}, 6^{2n}, 13^{4n+6} ($n \in \mathbb{N}$).

5. Arătați că următoarele numere naturale sunt pătrate perfecte:

a) $3^2 + 4^2$; b) $3^2 + 4^2 + 12^2$; c) $3^7 + 3^6$;
d) $2^{11} - 2^{10}$; e) $2 \cdot 3^3 \cdot 6^5$; f) $3^3 \cdot 12^5$.

6. Efectuați următoarele calcule și scrieți rezultatul sub formă de pătrat perfect:

a) $3 \cdot (3 \cdot 29 + 91 : 7 - 52)$; b) $1 + 3 + 5 + ... + 49$;
c) $2^{51} + 7 \cdot 2^{50}$; d) $9^{30} : 3^{11} + 10 \cdot 3^{48} - 3^{50}$.

7. Determinați câte elemente are mulțimea $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este pătrat perfect și } x \leq 1000\}$.

8. a) Care poate fi ultima cifră a pătratului unui număr natural?

b) Arătați că, dacă n este un număr natural, atunci numerele naturale $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte.

9. Arătați că numărul $a = 3^{45} + 2^{62}$ nu este pătrat perfect.

Editura Paralela 45

10. Calculați (utilizând descompunerea în factori primi):

a) $\sqrt{4}$; $\sqrt{64}$; $\sqrt{81}$; $\sqrt{196}$; $\sqrt{2500}$;

b) $\sqrt{2^2}$; $\sqrt{3^6}$; $\sqrt{2^2 \cdot 5^6}$; $\sqrt{6^4 \cdot 3^8}$; $\sqrt{2^2 \cdot 3^6 \cdot 5^4}$;

c) $\sqrt{2^{2n}}$; $\sqrt{3^{4m}}$; $\sqrt{2^{2n} \cdot 5^{6m}}$; $\sqrt{7^{4n+2}}$; $\sqrt{2^{6m-4}}$ ($m, n \in \mathbb{N}^*$);

d) $\sqrt{12 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{18 \cdot 2^{13}}$; $\sqrt{6^3 \cdot 2^5 \cdot 3^{11}}$; $\sqrt{7^{31} + 2 \cdot 7^{30}}$; $\sqrt{3^{22} - 2 \cdot 3^{21} + 3^{20}}$.

11. Calculați (folosind algoritmul de extragere a rădăcinii pătrate):

a) $\sqrt{225}$; $\sqrt{441}$; $\sqrt{576}$;

b) $\sqrt{1764}$; $\sqrt{3136}$; $\sqrt{7056}$;

c) $\sqrt{10404}$; $\sqrt{50625}$; $\sqrt{64516}$.

12. Calculați:

a) $\sqrt{36} + \sqrt{64} - \sqrt{81}$;

b) $\sqrt{100} - \left(\sqrt{169} - \sqrt{25}\right)$;

c) $\sqrt{9} + \sqrt{196} : \sqrt{49}$;

d) $\left(\sqrt{256} - \sqrt{144}\right) : \sqrt{4}$;

e) $\left(\sqrt{0} + \sqrt{1}\right)^7 + \sqrt{361}$;

f) $\left(2 + \sqrt{324}\right) \cdot \sqrt{16}$;

g) $\left(\sqrt{289} + \sqrt{169}\right) : \sqrt{225}$;

h) $2 \cdot \sqrt{121} - \sqrt{441}$.

13. Calculați:

a) $\sqrt{1+3+5+7+9+11}$;

b) $\sqrt{20 - 32 : (7-5)}$;

c) $\sqrt{104 : 2 + 4 \cdot 3}$;

d) $\sqrt{(14-6) \cdot (7+11)}$;

e) $\sqrt{2^8 + 2^{11}}$;

f) $\sqrt{15^2 + 20^2}$;

g) $\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}$;

h) $\sqrt{3\left(7^{12} - 7^{10}\right)}$.

14. Determinați $x \in \mathbb{N}$, știind că:

a) $\sqrt{x} = 15$; b) $\sqrt{x-2} = 16$; c) $7 + \sqrt{x} = 12$; d) $\sqrt{x+3} - 4 = 6$.

15. Calculați $\sqrt{\overline{abc}}$, știind că $\sqrt{\overline{1ba}} = \overline{c3}$.

16. Determinați numărul natural $\overline{abcd}$, știind că $\sqrt{\overline{abc5}} = \overline{3d}$.

17. Aflați lungimea laturii unui ring de box în formă de pătrat cu aria de 36 m².

18. Aflați perimetrul unui pătrat echivalent cu un dreptunghi cu lungimea L = 175 cm și lățimea l = 28 cm (două figuri plane se numesc echivalente dacă au ariile egale).

19. Podeaua unei camere are forma unui dreptunghi cu dimensiunile L = 12 m și l = 8 m. Pentru pavarea ei se folosesc 384 plăci pătrate de gresie cu latura de x cm. Aflați valoarea lui x.

20. Un teren de fotbal are lățimea egală cu $\frac{2}{5}$ din lungime și suprafața de 2 560 m². Determinați perimetrul terenului.

21. Un stilou costă a lei. Dacă prețul său se mărește cu a%, atunci stiloul va costa cu 3,24 lei mai mult. Aflați prețul inițial al stiloului.

Editura Paralela 45

I.11. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$

DEFINIȚIE: Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Numărul

$$m_a = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

se numește **media aritmetică** a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

Avem: $\min(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leq m_a \leq \max(a_1, a_2, \ldots, a_n)$; egalitățile au loc dacă și numai dacă $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Exemplu: Media aritmetică a numerelor 2, 3 și 7 este $m_a = \frac{2+3+7}{3} = 6$.

DEFINIȚIE: Fie n un număr natural, $n \geq 2$. Numărul

$$m_{ap} = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \ldots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n}$$

se numește **media aritmetică ponderată** a numerelor reale $a_1, a_2, \ldots, a_n$, cu ponderile $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Exemplu: Media aritmetică ponderată a numerelor 2, 3 și 7 cu ponderile 3, 5 și 2 este $m_{ap} = \frac{2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 7 \cdot 2}{3+5+2} = \frac{35}{10} = 3{,}5$.

Probleme rezolvate

1. Fie a și b două numere prime consecutive, mai mari decât 2. Arătați că numărul $\frac{a+b}{2}$ este un număr natural compus.

Soluție: Dacă a și b sunt numere prime mai mari decât 2, înseamnă că a și b sunt impare, deci $\frac{a+b}{2} \in \mathbb{N}$. Putem presupune, fără a restrânge generalitatea, că $a < b$. Cum $\frac{a+b}{2}$ este media aritmetică a numerelor a și b, avem $a < \frac{a+b}{2} < b$, de unde, având în vedere că a și b sunt numere prime consecutive, rezultă că $\frac{a+b}{2}$ este număr compus.

2. Media semestrială la matematică este media aritmetică ponderată dintre media aritmetică a notelor de la oral și nota de la teză, cu ponderile 3 și 1. Calculați media la matematică pe un semestru a unui elev care are, la oral, notele 4, 5, 5, 7, 9 și 10 la teză.

Soluție: Media elevului la oral este $\frac{4+5+5+7+9}{5} = 6$, deci media lui semestrială la matematică este $\frac{6 \cdot 3 + 10 \cdot 1}{3+1} = \frac{28}{4} = 7$.

Editura Paralela 45

3. Media de admitere în liceu este media aritmetică ponderată dintre nota la română, nota la matematică (de la examenul de Evaluare Națională) și media anilor de gimnaziu, cu ponderile 40%, 40% și 20%. Calculați media de admitere în liceu a unui elev care la examenul de Evaluare Națională a luat 8,50 la română, 9 la matematică și are 9,20 media anilor de gimnaziu.

Soluție: Media de admitere a elevului este $m_p = \frac{8,5 \cdot 40\% + 9 \cdot 40\% + 9,2 \cdot 20\%}{40\% + 40\% + 20\%} =$

$= \frac{340 + 360 + 184}{100} = 8,84.$

PROBLEME PROPUSE

1. Media aritmetică a 48 de numere este 60, iar media aritmetică a primelor 40 dintre ele este 36. Aflați media aritmetică a ultimelor 8 numere.

2. Media aritmetică a numerelor a_1 și a_2 este 8, media aritmetică a numerelor a_3, a_4 și a_5 este 72, iar media aritmetică a numerelor a_6, a_7, a_8 și a_9 este 95. Calculați media aritmetică a numerelor a_1, a_2, ..., a_9.

3. Calculați media ponderată a numerelor:

a) –3 și 5, cu ponderile 4 și 6; b) $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ și $\frac{2}{3}$, cu ponderile 4, 8 și 6.

4. Se amestecă 8 kg de orez de 4 lei kilogramul cu 12 kg de orez de 8 lei kilogramul. Calculați cât costă un kilogram din amestecul obținut astfel.

5. Maria a cumpărat 5 kg de mere la prețul de 6 lei kilogramul și 10 kg de mere la prețul de 4,5 lei kilogramul. Calculați prețul mediu al unui kilogram de mere dintre cele cumpărate de Maria.

6. La sfârșitul semestrului I din clasa a VII-a, Ana are următoarele note la matematică: 7, 8, 10, 10, 10 la oral și 5 la teză. Calculați media ei la matematică pe acest semestru.

7. Calculați media de admitere în liceu a lui Dan, știind că el a luat 8,80 la română, 9,20 la matematică (la examenul de Evaluare Națională) și are media generală a anilor de gimnaziu 9,50 (ponderile notelor sunt 40%, 40%, respectiv 20%).

I.12. MEDIA GEOMETRICĂ A DOUĂ NUMERE REALE POZITIVE

DEFINIȚIE: Dacă a și b sunt numere reale pozitive, atunci media lor geometrică (sau proporțională) este numărul $m_g = \sqrt{ab}$.

Exemplu: Media geometrică a numerelor 12 și 75 este $m_g = \sqrt{12 \cdot 75} = \sqrt{900} = 30$.

1. Media geometrică a două numere reale pozitive a și b este cuprinsă între cele două numere: $\min(a, b) \le m_g \le \max(a, b)$.

Egalitățile au loc dacă și numai dacă $a = b$.

Editura Paralela 45

RECAPITULARE ŞI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Arătați că $a = \sqrt{18} : \sqrt{2} + \sqrt{9^2 + 12^2}$ este număr natural.

(1p) **2.** Care este cel mai mic număr natural pătrat perfect divizibil cu 3, 4, 5 și 6?

(1p) **3.** Un dreptunghi cu lungimea de două ori mai mare decât lățimea are aria egală cu 288 m². Aflați câți metri are perimetrul său.

(1p) **4.** Determinați $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $4\sqrt{12} - \sqrt{27} + \sqrt{75} = x\sqrt{3}$.

(1p) **5.** Care dintre elementele mulțimii $A = \left\{-13; -\frac{1}{2}; 2,(3); \sqrt{18}; 7; \sqrt{64}\right\}$ este număr irațional?

(1p) **6.** Fie $a = \left(\sqrt{15}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{3}\right) + \left(\sqrt{18} - \sqrt{3}\right) : \sqrt{3}$. Calculați $\sqrt{a}$.

(1p) **7.** Calculați diferența dintre media aritmetică și media geometrică a numerelor $a = 5$ și $b = 45$.

(1p) **8.** Determinați $x \in \mathbb{R}$ astfel încât $\left(x - \sqrt{2}\right)^2 = 8$.

(1p) **9.** Determinați numărul $x = 16 + 4 \cdot \left\{2 + \sqrt{2} \cdot \left[\sqrt{2} + 3 \cdot \left(\sqrt{27} - 3\sqrt{3}\right)\right] - 7^0\right\} : (-1)^7$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Dovediți că $a = \sqrt{\frac{1}{4}} + \sqrt{\frac{1}{9}} + \sqrt{\frac{49}{36}}$ este număr natural.

(1p) **2.** Determinați numărul real x, știind că $\frac{x}{2\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{x}$.

(1p) **3.** Fie $a = \left|3 - \sqrt{5}\right| + \left|\sqrt{5} + \sqrt{3}\right| + \left|\sqrt{3} - 2\right|$. Calculați $(a - 7)^6$.

(1p) **4.** Determinați numărul întreg x, știind că $x - 1 < -\sqrt{3} < x$.

(1p) **5.** Pentru o demonstrație de gimnastică, 6250 de elevi din câteva școli au fost aranjați pe mai multe rânduri, astfel încât numărul de elevi din fiecare rând să fie egal cu numărul total de rânduri. Procedând astfel, organizatorul a constatat că 9 elevi au rămas în afara formației. Aflați numărul elevilor de pe un rând.

Editura Paralela 45

CAPITOLUL II
ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități

Proprietăți ale relației de egalitate în mulțimea numerelor reale

I. Dacă a și b sunt numere reale, atunci:

1. $a = b \Leftrightarrow a + c = b + c, \forall\, c \in \mathbb{R}$;
2. $a = b \Leftrightarrow a - c = b - c, \forall\, c \in \mathbb{R}$;
3. $a = b \Leftrightarrow a \cdot c = b \cdot c, \forall\, c \in \mathbb{R}^*$;
4. $a = b \Leftrightarrow a : c = b : c, \forall\, c \in \mathbb{R}^*$;

II. Dacă a, b, c, d sunt numere reale, atunci:

1. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a + c = b + d$;
2. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a - c = b - d$;
3. $a = b$ și $c = d \Rightarrow a \cdot c = b \cdot d$;
4. $a = b$ și $c = d \neq 0 \Rightarrow a : c = b : d$.

Probleme rezolvate

1. Considerăm propoziția: „Dacă a, b, c sunt numere reale și $a = b$, atunci $ac = bc$”. Stabiliți dacă reciproca acestei propoziții este adevărată.

Soluție: Reciproca este falsă. De exemplu, pentru $a = 1$, $b = 2$ și $c = 0$, avem $ac = bc$, dar $a \neq b$.

2. Fie a, b, c numere reale, astfel încât $a = 2$ și $a^2 + ab + ac = 12$. Determinați $3a - 4b - 4c$ și $a^2 - 2ab - 2ac$.

Soluție: Din relațiile date rezultă $4 + 2b + 2c = 12$ sau $2(b + c) = 8$, deci $b + c = 4$. Avem $3a - 4b - 4c = 3a - 4(b + c) = 6 - 16 = -10$ și $a^2 - 2ab - 2ac = 4 - 4b - 4c = 4 - 4(b + c) = 4 - 16 = -12$.

3. Fie a, b numere reale. Arătați că următoarele cinci egalități sunt echivalente:

a) $7a = 3b + 21$;
b) $7a + 9 = 3b + 30$;
c) $\frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$;
d) $4a = 3(b - a + 7)$;
e) $a(b - 7) - b(a - 3) = -21$.

Editura Paralela 45

Soluție: Avem: $7a = 3b + 21 \mid +9 \Leftrightarrow 7a + 9 = 3b + 30$, deci a) $\Leftrightarrow$ b); $7a = 3b + 21 \mid : 21 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{7} + 1$, deci a) $\Leftrightarrow$ c); $7a = 3b + 21 \mid -3a \Leftrightarrow 4a = 3(b - a + 7)$, deci a) $\Leftrightarrow$ d); e) $\Leftrightarrow ab - 7a -$ $- ba + 3b = -21 \Leftrightarrow -7a + 3b = -21 \mid \cdot (-1) \Leftrightarrow 7a - 3b = 21 \mid + 3b \Leftrightarrow 7a = 3b + 21$, deci a) $\Leftrightarrow$ e).

4. Se consideră expresia $E = -3(x - y) + x(y + 2) - y(x - 1) - 5(y - 1)$. Arătați că $E = 3$, pentru orice x, y numere reale ce verifică condiția $x + y = 2$.

Soluție: $E = -3x + 3y + xy + 2x - xy + y - 5y + 5 = -x - y + 5 = -(x + y) + 5 = -2 + 5 = 3$.

PROBLEME PROPUSE

1. Dacă $a = 1440$ și $b = 3780$, arătați că:
a) $21a = 8b$; b) $ab = 2^7 \cdot 3^5 \cdot 5^2 \cdot 7$; c) $a : b = 8 : 21$.

2. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a + 2b = 7$, $4b + 3c = 11$. Calculați $5a + 22b + 9c$.

3. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $3a + b = 7$ și $5b - 4c = 1$, calculați:
$$12a - 11b + 12c.$$

4. Fie a, b numere reale astfel încât $3a + 2 = 5b$. Arătați că:
a) $3a - 1 = 5b - 3$; b) $\frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$;
c) $3ab + 2b = 5b^2$; d) $9a^2 + 6a = 15ab$.

5. Dacă x, y sunt numere reale și $x - 2y = 0$, calculați $2x^2 - 3xy - 2y^2$.

6. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x = 3y$, calculați $6x - 9y - 2$, $\frac{3x}{y} - 5$ și $\frac{x^2 - y^2}{xy}$.

7. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, astfel încât $2x - 5y = 3y - 4x$, calculați $(-3x + 4y - 1)^7$.

8. Fie x, y numere reale, $y \neq 0$, astfel încât $4x + 3y = 0$. Calculați $\frac{2x - y}{x - 3y}$.

9. Dacă $x, y \in \mathbb{R}^*$ și $2x \neq y$ și $\frac{5x + 2y}{2x - y} = 0{,}75$, calculați $\frac{x}{y}$.

10. Considerăm propoziția: „Dacă $a = b$ și $c = d$, atunci $ac = bd$." Studiați dacă reciproca propoziției este adevărată sau falsă.

11. Fie a, b, c numere reale astfel încât $a + b = 7$, $b + c = 41$ și $c + a = 20$. Calculați $a + b + c$.

12. Fie a, b, c numere reale pozitive astfel încât $ab = 6$, $bc = 10$ și $ac = 15$. Calculați abc.

13. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $5a + 6b + 7c = 58$ și $7a + 6b + 5c = 62$, arătați că $a + b + c = 10$ și $a - c = 2$.

14. Dacă a, b, c sunt numere reale și $c^2 + ac + bc = 60$, $c = 5$, arătați că $a + b = 7$ și calculați:
$$3c + 5a + 5b,\ c^2 - 2ac - 2bc,\ (a - 5)(b - c)(c - 5).$$

Editura Paralela 45

15*. Dacă a, b, c sunt numere reale astfel încât $a + b = 2c$ și $b + c = 2a$, arătați că $a = b = c$.

16*. Dacă a, b, c, d sunt numere reale pozitive și $ac = bd$, iar $a + d = b + c$, atunci $a = b$ și $c = d$.

17. Considerăm propoziția: „Dacă a, b sunt numere reale și $a = b$, atunci $|a| = |b|$.”

a) Arătați că reciproca propoziției este falsă.

b) Dacă, în plus, $ab \geq 0$, demonstrați că reciproca este adevărată.

18. Arătați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc identitățile:

a) $2x - 3 + 5x + 4 - 6x - 1 = x$;

b) $4(x - 0{,}25) = 4x - 1$;

c) $3(x - 2) + 2(x + 3) = 5x$;

d) $3(2x - 1) - 2(3x - 1) = -1$;

e) $3\left(x-\frac{1}{6}\right)+4\left(x-\frac{1}{8}\right)=7\left(x-\frac{1}{7}\right)$;

f) $5(x - 1) - 3(x + 2) - 2(x - 5) + 1 = 0$;

g) $\frac{x}{26}+\frac{x+1}{39}+\frac{x+2}{52}-\frac{3}{13}=\frac{x-2}{12}$.

19. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$ și $2x + 3y = 1$, arătați că:

$$4(x - y) - 5(2x - 1) + 8(x - 2y) + 23y - 5 = 1.$$

20. Arătați că, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, au loc identitățile:

a) $2^n+2^n=2^{n+1}$;

b) $2^{n+2}-2^{n+1}-2^n=2^n$;

c) $2^{n-2}\cdot 4^{n+1}=8^n$;

d) $6^n+2^{n-1}\cdot 3^n+2^{n-1}\cdot 3^{n+2}=6^{n+1}$.

21. Fie $a = x + 2y - 3z$, $b = 2x - 3y + z$ și $c = -3x + y + 2z$, unde x, y, z sunt trei numere reale. Calculați $a^2 + ab + ac$.

II.2. Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii. Ecuaţii echivalente

- O ecuație de forma $ax + b = 0$, $x \in D$, unde $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$ și $D \subseteq \mathbb{R}$, este numită **ecuație de gradul I cu necunoscuta x**.
- Dacă $-\frac{b}{a} \in D$, o astfel de ecuație are soluția unică $x = -\frac{b}{a}$. În caz contrar, ecuația nu are soluție.
- Două ecuații se numesc **echivalente** dacă au aceeași mulțime de soluții.
- Spunem că o ecuație este **reductibilă** la o ecuație de gradul I, dacă este echivalentă cu o ecuație de gradul I.
- **Procedee de a obține ecuații echivalente:**
  – efectuarea unor calcule în oricare membru al ecuației;
  – adunarea (sau scăderea) în ambii membri a aceluiași număr real;
  – înmulțirea (sau împărțirea) ambilor membri cu același număr real nenul.

Editura Paralela 45

CAPITOLUL III
ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR

III.1. DATE STATISTICE – RECAPITULARE ŞI COMPLETĂRI. POLIGONUL FRECVENŢELOR

O serie de date statistice poate fi **descrisă** printr-un tabel de forma:

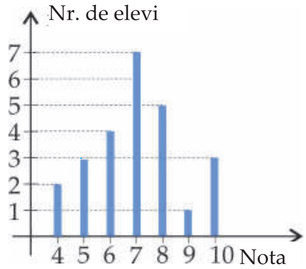
x	x_1	x_2	...	x_k
n	n_1	n_2	...	n_k

unde $x_1, x_2, ..., x_k$, sunt valorile care caracterizează un anumit fenomen, iar $n_1, n_2, ..., n_k$ indică **frecvențele** fiecăreia dintre valorile $x_1, x_2, ..., x_k$.

Seriile statistice pot fi reprezentate prin tabele, diagrame (cu bare, circulare), printr-un grafic sau folosind poligonul frecvențelor. Vom descrie aceste modalități de reprezentare în problemele rezolvate mai jos.

PROBLEME REZOLVATE

1. Notele obținute la teză de către elevii unei clase sunt cele din diagrama alăturată.
a) Câți elevi sunt în clasă? Câți dintre ei au obținut note cel puțin egale cu 9?
b) Care este nota cu cea mai mare frecvență?
c) Calculați media clasei la matematică.



Soluție: a) Numărul elevilor din clasă este $2 + 3 + 4 + 7 + 5 + 1 + 3 = 25$.
Dintre aceștia, $1 + 3 = 4$ elevi au obținut note cel puțin egale cu 9.
b) Nota cu cea mai mare frecvență este 7 (iar frecvența acesteia este 7).
c) Suma notelor este $4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 7 \cdot 7 + 8 \cdot 5 + 9 \cdot 1 + 10 \cdot 3 = 175$. Media clasei este $175 : 25 = 7{,}00$.

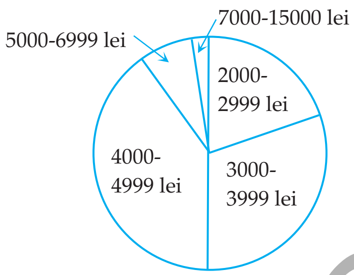
2. În tabelul de mai jos este descrisă distribuția angajaților dintr-o întreprindere după salariul brut pe care îl primesc:

Salariul brut lunar (lei)	Numărul de angajați
2000 – 2999	200
3000 – 3999	300
4000 – 4999	400
5000 – 6999	75
7000 – 15000	25

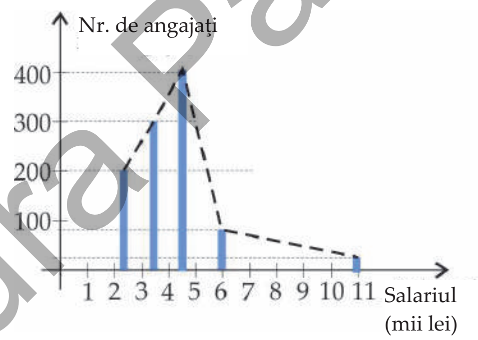
Editura Paralela 45

Reprezentați distribuția angajaților, utilizând:
a) o diagramă circulară;
b) o diagramă cu bare (folosiți valoarea centrală a fiecărei clase de salarizare pe axa orizontală);
c) poligonul frecvențelor.

Soluție: a) Unghiurile la centru corespunzătoare celor cinci sectoare ale reprezentării sunt: $\frac{200}{1000} \cdot 360° = 72°$; $\frac{300}{1000} \cdot 360° = 108°$; $\frac{400}{1000} \cdot 360° = 144°$; $\frac{75}{1000} \cdot 360° = 27°$, respectiv $\frac{25}{1000} \cdot 360° = 9°$. Diagrama circulară este cea din figura de mai jos.



b), c) Valorile centrale ale claselor de salarizare sunt 2500 lei, 3500 lei, 4500 lei, 6000 lei, respectiv 11000 lei. Diagrama cu bare este cea din figura de mai jos, iar poligonul frecvențelor este reprezentat cu linie întreruptă.



PROBLEME PROPUSE

1. Vârstele elevilor care participă la clubul de lectură al școlii sunt cele din tabelul următor:

Vârsta (ani)	10	11	12	13	14	15
Nr. de elevi	1	3	3	4	6	3

a) Câți elevi fac parte din clubul de lectură?
b) Care este vârsta medie a elevilor care participă la clubul de lectură?

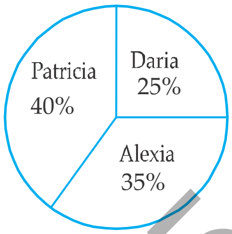
Editura Paralela 45

Nota fiecărei mașini se calculează cu formula $N = 3s + 2c + e + i$.

a) Calculați nota pentru mașina A.

b) Care este mașina câștigătoare?

19. Într-o clasă cu mai puțin de 30 de elevi, se organizează alegeri pentru desemnarea reprezentantului clasei în consiliul elevilor pe școală. Rezultatele sunt cele din diagrama circulară alăturată.



a) Cine a câștigat alegerile? b) Câți elevi sunt în clasă?

20. Trei muncitori primesc pentru o lucrare 1800 lei. Sumele primite de fiecare sunt proporționale cu numărul zilelor lucrate. Completați tabelul de mai jos.

	Popescu I.	Ionescu G.	Georgescu P.
Numărul de zile lucrate	5	2	3
Suma totală primită			

21. Cei 1040 de elevi ai unei școli completează un chestionar privind numărul orelor petrecute zilnic pe internet. Rezultatele chestionarului sunt cele din tabelul de mai jos:

Zilnic, folosesc internetul:	
– mai puțin de 1 oră	80 elevi
– între 1 oră și 2 ore	240 elevi
– între 2 ore și 3 ore	400 elevi
– între 3 ore și 4 ore	240 elevi
– mai mult de 4 ore	80 elevi

a) Reprezentați rezultatele chestionarului cu ajutorul unei diagrame cu bare.

b) Găsiți cinci numere naturale a, b, c, d, e, astfel încât numerele de elevi din fiecare categorie să fie proporționale cu aceste numere.

c) O altă școală are 780 de elevi. Estimați care este numărul celor care folosesc internetul între 3 ore și 4 ore pe zi.

III.2. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale

Numim **sistem de axe ortogonale** în plan (sau **reper cartezian**[1]) două drepte perpendiculare, organizate ca axe de numere reale având originea comună în punctul O de intersecție a dreptelor, pe fiecare dreaptă stabilindu-se câte un sens de parcurs și câte o unitate de măsură (de obicei, aceeași).

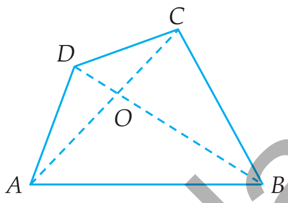
[1] De la Cartesius, numele latinizat al matematicianului şi filozofului francez René Descartes (1596-1650).

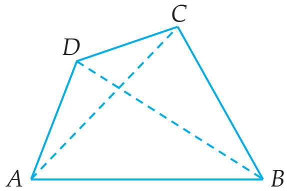
Editura Paralela 45

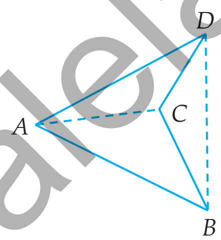
CAPITOLUL IV
PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

Elemente:
- laturi: segmentele AB, BC, CD, DA;
- diagonale: segmentele AC, BD;
- unghiuri: $\sphericalangle A$, $\sphericalangle B$, $\sphericalangle C$, $\sphericalangle D$.







Patrulater convex: ambele diagonale se află în interiorul patrulaterului.

Patrulater concav: una dintre diagonale se află în exteriorul patrulaterului.

Teoremă: Suma măsurilor unghiurilor unui patrulater convex este 360°.

Probleme rezolvate

1. Se consideră $ABCD$ un patrulater convex în care $AB = AD = 3$ cm, $BC = 4$ cm, $\sphericalangle ADB = 60°$ și $\sphericalangle CBD = 90°$ (figura 1).

a) Determinați măsurile unghiurilor A și B.

b) Aflați perimetrul patrulaterului.

c) Desenați patrulaterul $ABCD$.

Soluție: a) Triunghiul ABD este isoscel și are un unghi de 60°, deci este echilateral; rezultă că $BD = 3$ cm, iar $\sphericalangle A = \sphericalangle ABD = 60°$. Astfel, $\sphericalangle B = \sphericalangle ABD + \sphericalangle CBD = 150°$.

b) Cu teorema lui Pitagora în triunghiul BCD, obținem $CD = 5$ cm. Deducem că $\mathcal{P}_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15$ cm.

c) Folosind compasul, desenăm triunghiul echilateral ABD cu latura de 3 cm. În exteriorul acestuia, folosind echerul, desenăm triunghiul dreptunghic BCD, $\sphericalangle B = 90°$, cu $BC = 4$ cm. Patrulaterul $ABCD$ este cel căutat.

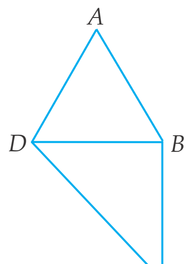


Fig. 1

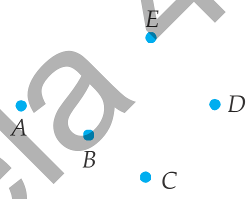
Editura Paralela 45

2. Notăm cu M mulțimea unghiurilor ascuțite ale unui patrulater convex. Câte elemente poate avea mulțimea M?

Soluție: Există patrulatere cu 0 unghiuri ascuțite (cele cu unghiurile 90°, 90°, 90°, 90°), cu 1 unghi ascuțit (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 100°, 100°, 100°), cu 2 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile 60°, 60°, 120°, 120°) și cu 3 unghiuri ascuțite (de exemplu cele cu unghiurile 80°, 80°, 80°, 120°). Dacă, prin absurd, un patrulater ar avea toate unghiurile ascuțite, suma lor ar fi mai mică decât $4 \cdot 90° = 360°$, fapt imposibil. În concluzie, mulțimea M poate avea 0, 1, 2 sau 3 elemente.

PROBLEME PROPUSE

1. Se consideră punctele A, B, C, D, E, ca în figura alăturată. Desenați și notați două patrulatere convexe și două patrulatere concave, având vârfurile în câte patru dintre cele cinci puncte.



2. a) Desenați un patrulater convex $ABCD$.
b) Numiți perechile de laturi opuse ale patrulaterului.
c) Numiți diagonalele patrulaterului.
d) Numiți perechile de unghiuri alăturate ale patrulaterului.

3. Alegem, la întâmplare, două dintre unghiurile unui patrulater. Care este probabilitatea ca unghiurile alese să fie opuse?

4. Laturile unui patrulater, exprimate în metri, sunt patru numere naturale consecutive. Aflați lungimile laturilor patrulaterului, știind că perimetrul său este 46 m.

5. Ionuț parcurge traseul $A \to B \to C \to D \to A$ din figura 2. El face 500 de pași. Care este lungimea pasului lui Ionuț?

6. Perimetrul patrulaterului din figura 3 este 100 cm. Perimetrele triunghiurilor ABC și ACD sunt 75 cm, respectiv 8 dm. Aflați lungimea diagonalei AC.

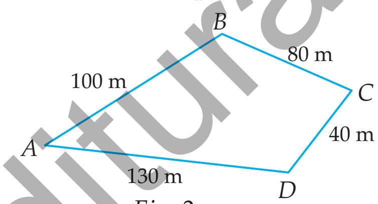


Fig. 2

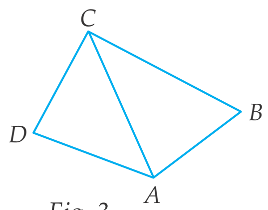


Fig. 3

7. Construiți un patrulater convex $ABCD$, știind că triunghiul ABD este isoscel cu $AB = BD = 5$ cm și $AD = 4$ cm, iar triunghiul BCD este echilateral. Calculați perimetrul patrulaterului.

8. Construiți un patrulater convex $ABCD$ care nu are toate unghiurile drepte și:
a) $\sphericalangle A = \sphericalangle B = 90°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 90°$.

9. Construiți un patrulater convex $ABCD$, astfel încât:
a) $\sphericalangle A = 40°$, $\sphericalangle B = 70°$, $\sphericalangle C = 150°$, $\sphericalangle D = ?\,°$; b) $\sphericalangle A = 100°$, $\sphericalangle B = ?°$, $\sphericalangle C = 120°$, $\sphericalangle D = 20°$.

Editura Paralela 45

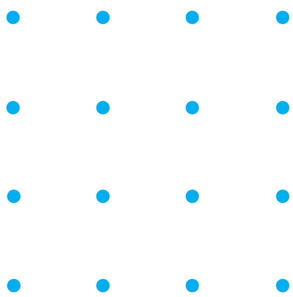


Fig. 10

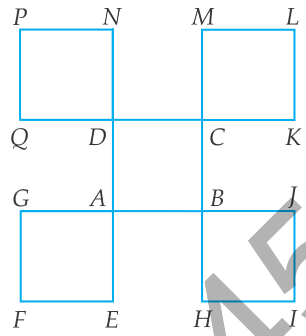


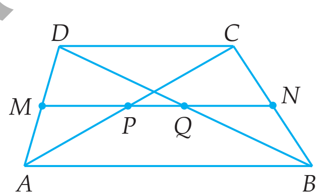
Fig. 11

21. În figura 11 sunt desenate cinci pătrate cu laturile egale. Identificați patru axe de simetrie și un centru de simetrie ale acestei configurații.

IV.7. Trapezul. Linia mijlocie în trapez

Patrulaterul cu două laturi paralele și celelalte două neparalele se numește **trapez**.

Laturile paralele se numesc **bazele** trapezului. Segmentul care unește mijloacele laturilor neparalele se numește **linia mijlocie** a trapezului.



Teoremă: Linia mijlocie a trapezului este paralelă cu bazele și este egală cu semisuma lungimilor bazelor.

Teorema reciprocă: Prin mijlocul unei laturi neparalele a unui trapez ducem o paralelă la baze; ea va trece prin mijlocul celeilalte laturi neparalele (devenind, astfel, linia mijlocie a trapezului).

Teoremă: Linia mijlocie a unui trapez intersectează diagonalele în mijloacele lor. Segmentul care unește mijloacele diagonalelor trapezului este egal cu semidiferența bazelor.

Probleme rezolvate

1. Fie $ABCD$ un trapez cu $AD \parallel BC$, care are $AB = 10$ cm, $AD = 5$ cm, $\sphericalangle B = 30°$ și $\sphericalangle C = 45°$. Notăm cu M și N proiecțiile punctelor A, respectiv D, pe baza BC (figura 1).

a) Arătați că $AM = DN$ și $AD = MN$.[1]

b) Aflați perimetrul trapezului $ABCD$.

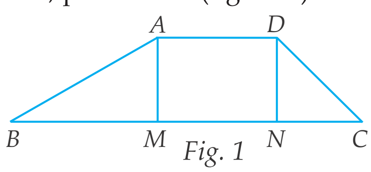


Fig. 1

[1] Considerăm că acest rezultat poate fi folosit, în general, fără demonstrație.

Editura Paralela 45

Soluție: a) Cum $AM \perp BC$ și $DN \perp BC$, rezultă că $AM \parallel DN$. Avem $AD \parallel MN$, deci $ADNM$ este un paralelogram (chiar dreptunghi), de unde $AM = DN$ și $AD = MN$.

b) Triunghiul ABM are $\sphericalangle M = 90°$, $\sphericalangle B = 30°$, $AB = 10$ cm, prin urmare $AM = \frac{1}{2} AB = 5$ cm și, cu teorema lui Pitagora, $BM = 5\sqrt{3}$ cm. Triunghiul DCN are $\sphericalangle N = 90°$, $\sphericalangle C = 45°$, deci este dreptunghic isoscel; avem $DN = AM = 5$ cm, așadar $NC = 5$ cm, iar $CD = 5\sqrt{2}$ cm. Obținem că $\mathscr{P}_{ABCD} = AB + BC + BD + DA = 5(5 + \sqrt{2} + \sqrt{3})$ cm.

Observație: Toate segmentele care au un capăt pe baza mare, celălalt pe baza mică și perpendiculare pe baze sunt egale între ele; lungimea lor comună se numește **înălțimea trapezului**.

2. Într-un patrulater convex în care diagonalele nu au același mijloc, segmentul care unește mijloacele diagonalelor este paralel cu o latură. Arătați că patrulaterul este un trapez (figura 2).

Soluție: Fie P și Q mijloacele diagonalelor AC, respectiv BD, cu $P \neq Q$; presupunem că $PQ \parallel AB$ și notăm $\{N\} = PQ \cap BC$. Cum P este mijlocul lui AC și $PN \parallel AB$, din reciproca teoremei liniei mijlocii în triunghi rezultă că N este mijlocul lui BC. Atunci QN este linie mijlocie în ΔBCD, deci $QN \parallel CD$. Deducem că $AB \parallel CD$ ($\parallel PN$), așadar $ABCD$ este trapez sau paralelogram. Însă $P \neq Q$, deci $ABCD$ nu poate fi paralelogram, prin urmare este un trapez.

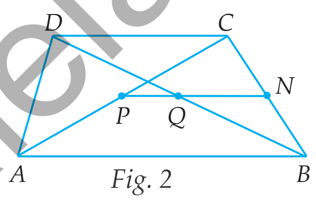


Fig. 2

PROBLEME PROPUSE

1. În trapezul $ABCD$, AB este bază, $\sphericalangle A = 40°$ și $\sphericalangle C = 120°$. Aflați măsurile unghiurilor B și D.

2. Într-un trapez dreptunghic, un unghi are măsura de 70°. Aflați măsurile unghiurilor trapezului.

3. Fie $ABCD$ un trapez dreptunghic în care AB este baza mare, iar triunghiul ABC este dreptunghic isoscel. Determinați măsurile unghiurilor trapezului.

4. Fie $ABCD$ un trapez cu $\sphericalangle A = 48°$, $\sphericalangle B = 62°$. Notăm cu M punctul de intersecție a laturilor neparalele.

a) Demonstrați că AB este baza mare a trapezului.

b) Aflați măsurile unghiurilor triunghiului MCD.

5. Într-un patrulater $ABCD$ avem: $\sphericalangle A = 50°$, $\sphericalangle B = 60°$, $\sphericalangle C = 120°$. Demonstrați că $ABCD$ este trapez.

6. Într-un patrulater $ABCD$ avem: $\sphericalangle A = 70°$, $\sphericalangle D = 110°$. Arătați că $ABCD$ este trapez sau paralelogram.

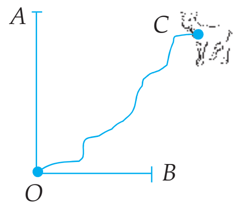
Editura Paralela 45

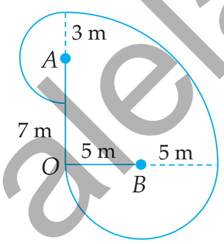
CAPITOLUL V
CERCUL

V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a

Probleme rezolvate

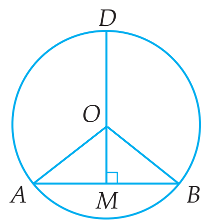
1. O capră C este legată cu o funie lungă de 10 m de un punct O și este situată în interiorului unghiului AOB, ca în figura de mai jos din stânga. OA este un gard de 7 m, iar OB un gard de 5 m, pe care capra nu le poate sări. Desenați suprafața de iarbă pe care o poate paște capra.





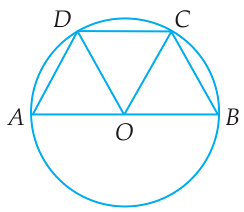
Soluție: Capra poate paște iarba din interiorul sfertului de cerc de centru O și rază 10 m, din interiorul semicercului de centru B și rază 5 m și din interiorul semicercului de centru A și rază 3 m, ca în figura de mai sus din dreapta.

2. Fie A, B două puncte ale cercului $\mathcal{C}(O, R)$. Perpendiculara din O pe AB intersectează cercul $\mathcal{C}(O, R)$ în D (D aparține arcului mare AB). Dacă $\sphericalangle OAB = 40°$, aflați măsurile arcelor mici $\overset{\frown}{DA}$, $\overset{\frown}{DB}$ și $\overset{\frown}{AB}$.



Soluție: Fie $DO \cap AB = \{M\}$. Din triunghiul AOM obținem că $\sphericalangle AOM = 50°$, deci $\overset{\frown}{DOA} = 130°$. Rezultă că măsura arcului $\overset{\frown}{AD}$ este 130° și, analog, măsura arcului $\overset{\frown}{BD}$ este tot 130°. Cum $\sphericalangle AOB = 100°$, măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 100°.

3. Fie A, B puncte diametral opuse în cercul $\mathcal{C}(O, R)$, iar C și D două puncte pe unul dintre semicercurile determinate de AB, astfel încât arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{DA}$ au măsurile egale. Arătați că:



a) măsura unghiului DOC este 60°;

b) patrulaterul $ABCD$ este trapez isoscel;

c) patrulaterul $BCDO$ este romb.

Soluție: Cum măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$ este 180° și arcele $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ și $\overset{\frown}{DA}$ sunt egale, fiecare arc va avea 60°.

Editura Paralela 45

V.4. TANGENTE DINTR-UN PUNCT EXTERIOR LA UN CERC

Definiție. Dacă distanța de la centrul unui cerc la o dreaptă este egală cu raza cercului, spunem că dreapta este tangentă cercului. În această situație, dreapta și cercul au un singur punct comun.

Propoziție. Dintr-un punct exterior unui cerc se pot duce două tangente la acel cerc.

Teoremă. Dacă AB și AC sunt tangente duse din punctul A la cercul $\mathscr{C}(O, r)$, unde $A \in \text{Ext}\,\mathscr{C}$ și $B, C \in \mathscr{C}$, atunci:

a) $AB = AC$;

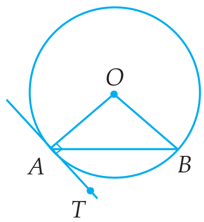
b) OA este bisectoarea unghiurilor BAC și BOC;

c) OA este mediatoarea segmentului BC;

d) OA împarte arcele cercului cu extremitățile B și C în părți egale.

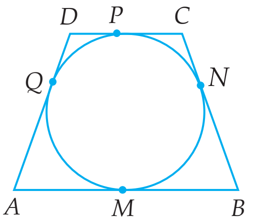
PROBLEME REZOLVATE

1. Fie AB o coardă a cercului $\mathscr{C}(O)$, iar AT o dreaptă care trece prin A. Dreapta AT este tangentă cercului dacă și numai dacă măsura unghiului BAT este egală cu jumătate din măsura arcului $\overset{\frown}{AB}$.



Soluție: Cum triunghiul OAB este isoscel, $OA = OB$, avem $\measuredangle OAB = 90° - \frac{1}{2} \cdot \measuredangle O$. Atunci AT este tangentă la $\mathscr{C} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow OA \perp AT \Leftrightarrow \measuredangle BAT = 90° - \measuredangle OAB \Leftrightarrow \measuredangle BAT = \frac{1}{2} \cdot \measuredangle O$.

2. Fie $ABCD$ un patrulater cu proprietatea că există un cerc $\mathscr{C}$ tangent la fiecare dintre laturile sale[1]; atunci $AB + CD = AD + BC$.



Soluție: Segmentele AM și AQ sunt tangente duse la $\mathscr{C}$ din punctul exterior A; conform teoremei, $AM = AQ$. Analog, se arată că $BM = BN$, $CN = CP$ și $DP = DQ$. Astfel, $AB + CD =$ $= AM + BM + CP + DP = AQ + BN + CN + DQ = AD + BC$.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie ABC un triunghi isoscel, $AB = AC$ și M mijlocul laturii BC. Arătați că cercul de centru A și rază AM este tangent dreptei BC.

2. Fie $ABCD$ un pătrat cu latura $AB = 5$ cm, iar O punctul de intersecție a diagonalelor sale. Arătați că cercul de centru O și rază $r = 2{,}5$ cm este tangent laturilor pătratului.

---

[1] Un astfel de patrulater se numește **circumscriptibil**.

Editura Paralela 45

11. Segmentele AB, AC și BD sunt tangente cercului $\mathscr{C}(O)$, cu C, $D \in \mathscr{C}$. Știind că $AC = 5$ cm și $BD = 7$ cm, aflați lungimea segmentului AB (figura 7).

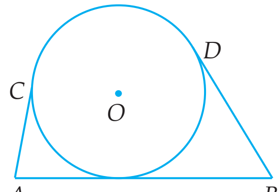


Fig. 7

12. Fie un cerc $\mathscr{C}(O, r)$, $r = 3$ cm și A, B două puncte pe cerc, astfel încât $AB = 3$ cm. Tangentele în A și B la cercul $\mathscr{C}$ se intersectează în C. Aflați măsura unghiului ACB și lungimile segmentelor OC și AC.

13. Fie un cerc $\mathscr{C}(O, r)$, $r = 4$ cm și A un punct, astfel încât $OA = 4\sqrt{2}$ cm. Fie AB și AC tangentele duse din A la cercul $\mathscr{C}$, B, $C \in \mathscr{C}$. Arătați că patrulaterul $ABOC$ este un pătrat.

14. Fie AB un diametru al cercului $\mathscr{C}(O, r)$, $r = 5$ cm, iar C un punct al cercului, diferit de A și B. Notăm cu D și E proiecțiile punctelor A, respectiv B, pe tangenta în C la $\mathscr{C}$ (figura 8). Calculați suma $AD + BE$.

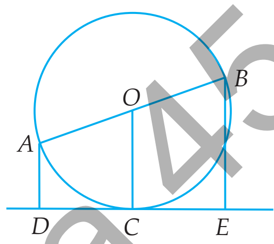


Fig. 8

15. Fie A și B două puncte situate pe cercul $\mathscr{C}(O)$, aflate într-un același semicerc. Se notează cu C proiecția punctului B pe tangenta în A la cercul $\mathscr{C}(O)$ (figura 9). Demonstrați că AB este bisectoarea $\sphericalangle OBC$.

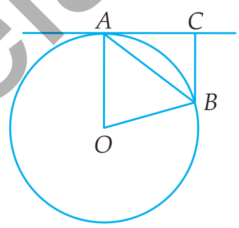


Fig. 9

16. Fie a și b două drepte paralele, astfel încât $d(a, b) = 3$ cm.

a) Câte cercuri tangente la a și b există? Unde se află centrele lor și ce puteți spune despre razele lor?

b) Câte cercuri tangente la a și b trec prin punctul P, situat între a și b?

c) Un automat de cafea funcționează cu monede care trebuie introduse printr-o fantă de 3 cm (presupunem că toate monedele au aceeași grosime). Elena are monede cu razele $r_1 = 1{,}5$ cm și $r_2 = 2$ cm. Cu care dintre aceste monede va putea Elena să cumpere o cafea?

17. Se consideră un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ și un punct $A \in \mathscr{C}(O, r)$. Fie B simetricul lui O față de A și M mijlocul lui OA. Perpendiculara în M pe OA intersectează cercul $\mathscr{C}$ în C și D (figura 10). Demonstrați că BC și BD sunt tangente la cercul $\mathscr{C}$.

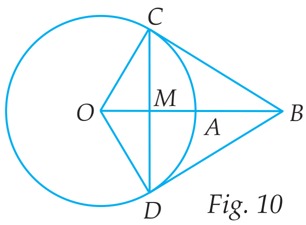


Fig. 10

18. Desenați un cerc $\mathscr{C}(O, r)$, $r = 2{,}5$ cm și un punct A, astfel încât $OA = 6$ cm. Marcați pe desen punctul M, mijlocul segmentului OA și trasați cercul $\mathscr{C}(M, R)$, $R = 3$ cm. Notați cu B și C punctele în care se intersectează cercurile $\mathscr{C}(O, r)$ și $\mathscr{C}(M, R)$.

a) Arătați că AB și AC sunt tangente la cercul $\mathscr{C}(O, r)$.

b) Deduceți o metodă pentru a construi tangentele dintr-un punct exterior la un cerc.

Editura Paralela 45

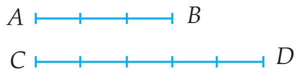
CAPITOLUL VI
ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VI.1. SEGMENTE PROPORŢIONALE. TEOREMA PARALELELOR ECHIDISTANTE

1. Raportul a două segmente este raportul lungimilor lor (exprimate prin aceeași unitate de măsură).

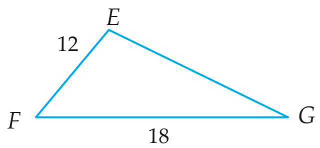
Exemple:

a)



Dacă $AB = 3$ cm și $CD = 5$ cm, atunci raportul segmentelor AB și CD este $\frac{AB}{CD} = \frac{3}{5}$.

b)



Dacă $EF = 12$ mm și $FG = 18$ mm, atunci raportul segmentelor EF și FG este $\frac{EF}{FG} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$.

2. Șirurile de segmente (A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ...) și (C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3, ...) se numesc (direct) proporționale dacă șirurile lungimilor lor sunt (direct) proporționale, adică:

$$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \ldots = k.$$

Valoarea comună, k, a acestor rapoarte se numește **factor de proporționalitate**.

Exemplu: Dacă $A_1B_1 = 2$ m, $A_2B_2 = 5$ m, $A_3B_3 = 7$ m, $C_1D_1 = 6$ m, $C_2D_2 = 15$ m, $C_3D_3 = 21$ m, atunci:

$\frac{A_1B_1}{C_1D_1} = \frac{A_2B_2}{C_2D_2} = \frac{A_3B_3}{C_3D_3} = \frac{1}{3}$, deci A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 și C_1D_1, C_2D_2, C_3D_3 sunt (direct) **proporționale**, iar $k = \frac{1}{3}$ este factorul lor de proporționalitate.

3. Împărțirea unui segment într-un raport dat

Propoziția 1. Există un singur punct interior unui segment care împarte segmentul considerat într-un raport dat.

Exemplu:

$M \in (AB)$, $\frac{AM}{MB} = \frac{2}{5}$

Propoziția 2. Există un singur punct exterior unui segment (dar situat pe dreapta suport a segmentului) care împarte segmentul considerat într-un raport dat, diferit de 1.

Editura Paralela 45

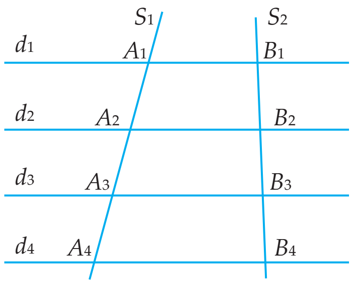
Exemplu: 

$N \in AB, N \notin (AB), \dfrac{NA}{NB} = \dfrac{2}{5}$

Observație: Pe dreapta AB există exact două puncte, $M \in (AB)$ și $N \notin (AB)$, astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NA}{NB} = k$, unde $k > 0$, $k \neq 1$. Cele două puncte, M și N, se numesc **puncte conjugate armonic** în raport cu A și B.

4. Teorema paralelelor echidistante

Dacă dreptele paralele $d_1, d_2, ..., d_n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$) determină pe o secantă segmente de lungimi egale, atunci ele determină pe orice altă secantă segmente de lungimi egale.



Dacă $d_1 \parallel d_2 \parallel d_3 \parallel d_4$ și $A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4$, atunci $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$.

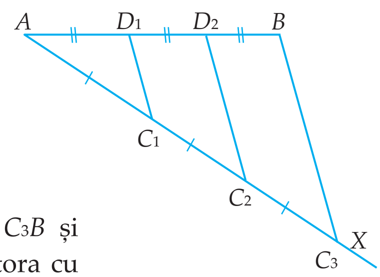
5. Împărțirea unui segment în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$)

Să împărțim un segment AB în trei părți egale.

Pentru aceasta, procedăm astfel:

I. Trasăm o semidreaptă AX (cu direcția diferită de AB) și alegem un punct oarecare $C_1 \in AX$.

II. Construim cu ajutorul unui compas punctele $C_2, C_3 \in AX$, astfel încât $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3$.



III. Prin punctele C_1 și C_2 ducem paralele la C_3B și notăm cu D_1, respectiv D_2 intersecțiile acestora cu segmentul AB. Conform teoremei paralelelor echidistante, avem $AD_1 = D_1D_2 = D_2B$.

Procedăm analog pentru a împărți un segment AB în n părți egale ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$).

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie un segment AB cu lungimea de 14 cm și un punct $C \in AB$, astfel încât $\dfrac{CA}{CB} = \dfrac{2}{5}$. Aflați lungimile segmentelor CA și CB (figura 1).

Fig. 1

Editura Paralela 45

PROBLEME PROPUSE

1. Fie A, B, C, D patru puncte coliniare (în această ordine), astfel încât $AB = BC = CD$. Determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\dfrac{AB}{AD}, \dfrac{BD}{AD}$ și $\dfrac{AB}{BD}$.

2. Fie M, N, P, Q, R cinci puncte coliniare (în această ordine), astfel încât $MN = NP = PQ = QR$. Aflați valoarea fiecăruia dintre rapoartele $\dfrac{MN}{MR}, \dfrac{PR}{MR}, \dfrac{MR}{NR}$ și $\dfrac{MQ}{NR}$.

3. Fie AB un segment cu lungimea de 11 cm și punctele $M, N \in (AB)$, astfel încât $AM = 4$ cm și $MN = 5$ cm. Determinați valoarea fiecăruia dintre rapoartele: $\dfrac{AM}{AN}, \dfrac{MN}{AB}, \dfrac{MB}{NB}, \dfrac{NB}{AM}$ (figura 4).

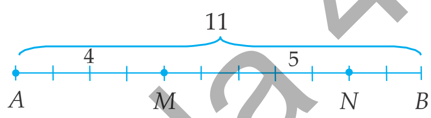


Fig. 4

4. Se consideră un segment AB.

a) Dacă $C \in AB$, astfel încât $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{2}{3}$ și $BC = 4$ m, aflați lungimile segmentelor AC și AB.

b) Dacă $M \in AB$, $\dfrac{AM}{BM} = \dfrac{3}{5}$ și $AB = 32$ cm, determinați lungimile segmentelor AM și BM.

5. Fie AB un segment cu lungimea de 8 cm și un punct P situat pe dreapta AB, în exteriorul segmentului AB, astfel încât $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{5}{7}$. Aflați lungimile segmentelor PA și PB.

6. Segmentul AB, cu lungimea de 45 cm, este împărțit de punctele M și N în trei părți, AM, MN și NB, direct proporționale cu 3, 5, respectiv 7. Aflați lungimile segmentelor AM, MN și NB.

7. Fie P un punct pe dreapta AB. Determinați valorile rapoartelor $\dfrac{PA}{AB}$ și $\dfrac{PB}{AB}$, știind că:

a) $P \in (AB)$ și $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{3}{11}$; b) $P \notin (AB)$ și $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{2}{3}$; c) $P \notin (AB)$ și $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{7}{5}$.

8. Se consideră un segment AB și punctele $M, N \in (AB)$, astfel încât $\dfrac{MA}{MB} = \dfrac{NB}{NA}$. Demonstrați că $MA = NB$.

9. Pe dreapta AB se consideră punctele M și N, astfel încât $M \in (AB)$ și $\dfrac{MA}{MB} = k$, $(k > 0)$, $N \notin (AB)$, $\dfrac{NA}{NB} = p$ $(0 < p < 1)$. Determinați (în funcție de k sau p) valorile

Editura Paralela 45

16. Se consideră un paralelogram $ABCD$ și punctul $E \in AB$. Fie $\{M\} = CE \cap BD$ și $\{N\} = DE \cap AC$. Arătați că $\frac{AN}{CN} + \frac{BM}{DM} = 1$ (figura 4).

17. Se consideră un trapez $ABCD$ ($AB \parallel CD$) cu $AB = 12$ cm și $CD = 9$ cm. Fie punctele $M \in AD$ și $N \in BC$, astfel încât $MN \parallel AB$ și $\frac{AM}{MD} = \frac{1}{2}$. Calculați lungimea segmentului MN (figura 5).

18. Se consideră un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$. Fie punctele $M \in AD$ și $N \in BC$, astfel încât $MN \parallel AB$ și $\frac{AM}{MD} = \frac{4}{3}$. Aflați lungimea segmentului AB, știind că $CD = 14$ cm și $MN = 20$ cm.

19. Fie un trapez $ABCD$ cu $AB \parallel CD$, $AB = 20$ m, $CD = 5$ m și $\{O\} = AC \cap BD$. Paralela dusă prin O la baze intersectează pe AD în E și pe BC în F. Calculați lungimile segmentelor EO și EF.

20. În triunghiul ABC ducem $DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC$. Dacă M este mijlocul laturii BC și $\{N\} = AM \cap DE$, demonstrați că $DN = NE$ (figura 6).

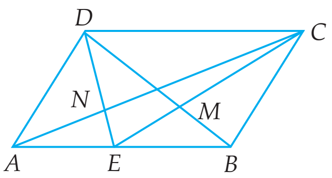


Fig. 4

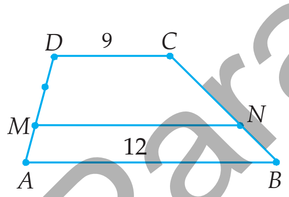


Fig. 5

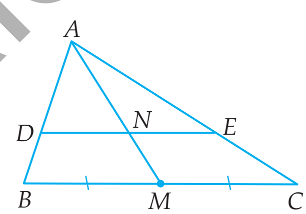


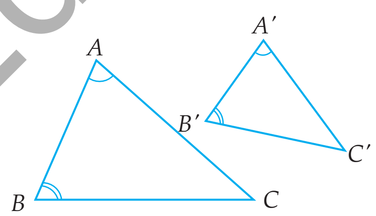
Fig. 6

21. Se consideră un triunghi și $DE \parallel BC$, $D \in AB$, $E \in AC$. Fie $M \in BC$ și $N \in DE$, astfel încât $\frac{BM}{MC} = \frac{DN}{NE}$. Demonstrați că punctele A, N și M sunt coliniare.

VI.5. Criterii de asemănare a triunghiurilor

1. Teorema 1 (cazul I de asemănare)

Dacă două triunghiuri au două perechi de unghiuri egale, atunci ele sunt asemenea.

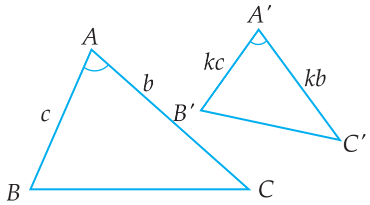


$\sphericalangle A = \sphericalangle A'$ și $\sphericalangle B = \sphericalangle B' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$.

Editura Paralela 45

2. Teorema 2 (cazul II de asemănare)

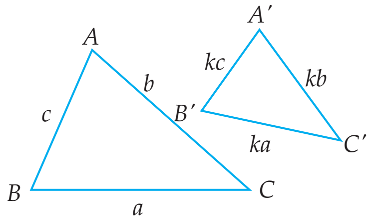
Dacă două triunghiuri au două perechi de laturi proporționale și unghiurile formate de aceste laturi egale, atunci triunghiurile sunt asemenea.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} \text{ și } \sphericalangle A = \sphericalangle A' \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

3. Teorema 3 (cazul III de asemănare)

Dacă două triunghiuri au laturile respectiv proporționale, atunci ele sunt asemenea.



$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'} \Rightarrow \Delta ABC \sim \Delta A'B'C'.$$

PROBLEME REZOLVATE

1. Fie ABC un triunghi echilateral și punctele $D \in BC$, $E \in CA$, astfel încât $BD = CE$. Notăm cu F intersecția dreptelor AD și BE (figura 1).

a) Arătați că $\Delta ABD \sim \Delta BFD$.

b) Determinați măsura unghiului BFD și arătați că:

$$BD^2 = FD \cdot AD.$$

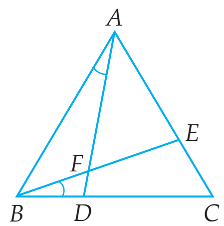


Fig. 1

Soluție: a) Din relațiile $AB = BC$, $BD = CE$ și $\sphericalangle ABD = \sphericalangle BCE = 60°$, obținem $\Delta ABD \equiv \Delta BCE$, deci $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CBE = \sphericalangle FBD$. Conform cazului I de asemănare, din egalitățile $\sphericalangle BAD = \sphericalangle FBD$ și $\sphericalangle ADB = \sphericalangle BDF$ rezultă că $\Delta ABD \sim \Delta BFD$.

b) Întrucât $\Delta ABD \sim \Delta BFD$, avem $\sphericalangle BFD = \sphericalangle ABD = 60°$ și $\dfrac{BD}{FD} = \dfrac{AD}{BD}$, deci $BD^2 = FD \cdot AD$.

2. Fie un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 2AD$. Dacă $E \in CD$ și $F \in DA$ sunt astfel încât $AF = 2DE$, demonstrați că $AE \perp BF$ (figura 2).

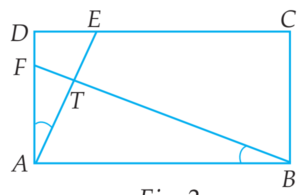


Fig. 2

Soluție: Fie $\{T\} = AE \cap BF$. Cum $\dfrac{AD}{AB} = \dfrac{1}{2} = \dfrac{DE}{AF}$ și $\sphericalangle EDA = \sphericalangle FAB = 90°$, rezultă că $\Delta DEA \sim \Delta AFB$ (cazul II de asemănare), deci $\sphericalangle DAE = \sphericalangle ABF$. De aici, având în vedere

Editura Paralela 45

CAPITOLUL VII
RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

VII.1. Proiecţii ortogonale pe o dreaptă

- Proiecția ortogonală a unui punct pe o dreaptă este piciorul perpendicularei din acel punct pe dreaptă.
- Proiecția ortogonală a unei mulțimi F pe o dreaptă este mulțimea F' a tuturor proiecțiilor punctelor mulțimii F pe acea dreaptă.
- Proiecția unui segment pe o dreaptă este un segment sau un punct.

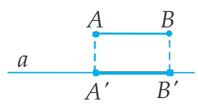
Problemă rezolvată

Fiind dată o dreaptă a și un segment AB, determinați proiecția segmentului AB pe dreapta a.

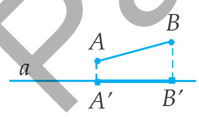
Soluție: Fie A' și B' proiecțiile punctelor A, respectiv B, pe dreapta a. Analizăm situațiile:

I. Segmentul AB nu are puncte comune cu dreapta a.

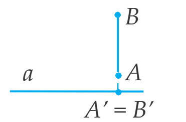
a) $AB \parallel a$;



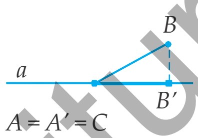
b) $AB \nparallel a$, $AB \not\perp a$;

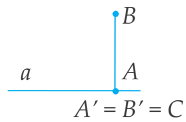


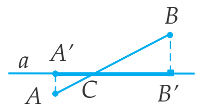
c) $AB \nparallel a$, $AB \perp a$.



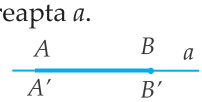
II. Segmentul AB are un singur punct, C, comun cu dreapta a.

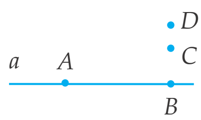






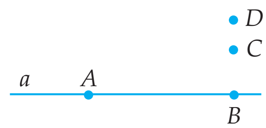
III. Segmentul AB este inclus în dreapta a.





Probleme propuse

1. În figura alăturată, punctele A și B sunt pe dreapta a, iar B, C, D sunt coliniare și $BC \perp a$. Găsiți proiecția mulțimii $F = \{A, B, C, D\}$ pe dreapta a.



Editura Paralela 45

2. Fie $ABCD$ un trapez, $AB \parallel CD$, $AB > CD$. Proiecțiile laturilor neparalele ale trapezului pe dreapta AB au lungimile egale cu 2 cm și, respectiv, 4 cm. Dacă $CD = 6$ cm, determinați lungimea bazei AB.

3. Fie $ABCD$ un pătrat de centru O. Determinați:
   a) proiecțiile punctului A pe dreptele BD, BC, respectiv AC;
   b) proiecțiile segmentului AB pe dreptele AD, respectiv AC;
   c) proiecția segmentului AC pe dreapta AB.

4. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A, iar D proiecția punctului A pe BC. Determinați proiecția:
   a) catetei AC pe ipotenuză; b) ipotenuzei BC pe AB; c) înălțimii AD pe BC;
   d) catetei AB pe AC; e) catetei AB pe AD.

5. Segmentul AB, având lungimea de 6 cm, formează cu o dreaptă a un unghi de 60°. Aflați lungimea proiecției segmentului AB pe dreapta a.

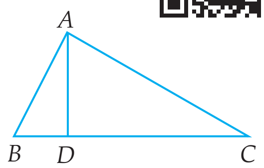
6. Într-un sistem de coordonate xOy considerăm punctul $A(2, -3)$. Care sunt coordonatele punctelor M și N, proiecțiile punctului A pe Ox, respectiv Oy?

7. În sistemul de coordonate xOy considerăm punctele $A(1, 3)$ și $B(-2, 1)$. Care sunt lungimile proiecțiilor segmentului AB pe Oy, respectiv Ox?

VII.2. Teorema înălțimii

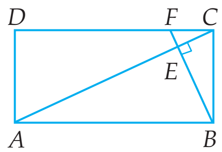
Într-un triunghi dreptunghic, lungimea înălțimii din vârful unghiului drept este medie proporțională între lungimile proiecțiilor catetelor pe ipotenuză.

ΔABC, $\sphericalangle BAC = 90°$, $AD \perp BC$, $D \in BC \Rightarrow AD^2 = BD \cdot DC$.



Probleme rezolvate

1. O grădină are formă de dreptunghi. Construim o alee BF, $F \in DC$, astfel încât $BF \perp AC$. Dacă $\{E\} = AC \cap BF$, $AE = 240$ m și $CE = 60$ m, aflați:
   a) aria terenului; b) lungimea aleii BF.



Soluție: a) Din teorema înălțimii în triunghiul ABC rezultă că $BE^2 = AE \cdot EC$ și de aici obținem $BE = 120$ m. Prin urmare, $\mathcal{A}_{ABCD} = 2 \cdot \mathcal{A}_{ABC} = 36000$ m² $= 3{,}6$ ha.

b) Folosind teorema înălțimii în triunghiul BCF, avem $CE^2 = BE \cdot EF$. Rezultă că $EF = 30$ m. Deci, $BF = 150$ m.

2. (Reciproca teoremei înălțimii) Dacă într-un triunghi ABC înălțimea AD (cu D între B și C) este medie proporțională între proiecțiile laturilor AB și AC pe BC, atunci triunghiul este dreptunghic în A.

Editura Paralela 45

Soluție: Din $AD^2 = BD \cdot DC$ rezultă că $\frac{AD}{DC} = \frac{BD}{AD}$ și, cum $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CDA = 90°$, deducem că $\Delta ADB \sim \Delta CDA$. Prin urmare, $\sphericalangle BAD = \sphericalangle ACD$, deci $\sphericalangle BAC = \sphericalangle BAD + \sphericalangle DAC = \sphericalangle BCA + \sphericalangle DAC = 90°$, deci ABC este triunghi dreptunghic în A.

PROBLEME PROPUSE

1. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
a) Dacă $BD = 4$ cm, $DC = 9$ cm, calculați AD și BC.
b) Dacă $AD = 12$ cm, $BD = 9$ cm, calculați BC.
c) Dacă $DC = 16$ m, $BC = 25$ m, calculați AD și BD.

2. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
a) Dacă $BD = 0,8$ m, $CD = 7,2$ m, calculați AD și BC.
b) Dacă $BD = 3,5$ cm, $BC = 35$ cm, calculați AD și DC.
c) Dacă $CD = 0,12$ cm, $AD = 0,9$ cm, calculați BD.

3. Fie ABC un triunghi dreptunghic în A și $AD \perp BC$, $D \in BC$.
a) Dacă $BD = 2\sqrt{3}$ cm, $BC = 8\sqrt{3}$ cm, aflați AD.
b) Dacă $AD = 2\sqrt{2}$ cm, $BD = 4$ cm, aflați CD.
c) Dacă $AD = 3\sqrt{3}$ cm, $DC = 3$ cm, aflați BC.

4. Un stâlp AD este ancorat cu ajutorul a două cabluri, AB și AC (B, D, C – coliniare) care formează între ele un unghi drept (figura 1). Știind că $BD = 18$ m, $CD = 50$ m, aflați înălțimea stâlpului.

5. În triunghiul ABC dreptunghic în A, proiecțiile catetelor AB, respectiv AC pe BC sunt egale cu 16 cm și, respectiv, 9 cm. Calculați aria triunghiului ABC.

6. În triunghiul ABC dreptunghic în A, proiecția punctului A pe BC este D. Dacă $BD = 20$ m, $CD = 22$ m, arătați că $AD < 21$ m.

7. Într-un romb $ABCD$ de centru O, cu latura de 13 cm, lungimea proiecției segmentului AO pe AB este egală cu 9 cm. Aflați lungimea înălțimii și aria rombului.

8. Fie $ABCD$ un dreptunghi, $AE \perp BD$, $E \in BD$, iar $\{F\} = AE \cap BC$. Dacă $DE = 8$ cm, $BE = 18$ cm, calculați AE și EF (figura 2).

9. În trapezul isoscel $ABCD$, $AB \parallel CD$, $CD > AB$, diagonala BD este perpendiculară pe latura BC. Dacă $AB = 18$ cm și $CD = 30$ cm, calculați aria trapezului (figura 3).

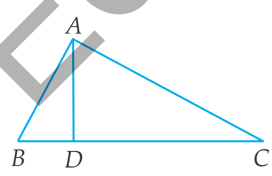


Fig. 1

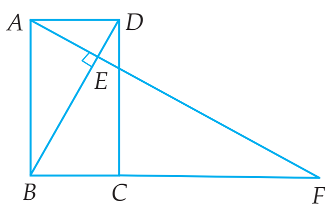


Fig. 2

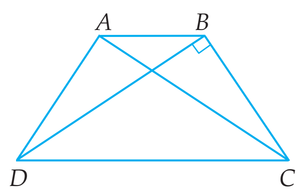


Fig. 3

Editura Paralela 45

VII.7. CALCULUL ELEMENTELOR (LATURĂ, APOTEMĂ, ARIE, PERIMETRU) ÎN TRIUNGHIUL ECHILATERAL, ÎN PĂTRAT ŞI ÎN HEXAGONUL REGULAT

	Latură	Apotemă	Arie	Perimetru
Triunghi echilateral	$R\sqrt{3}$	$\frac{R}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$	$3R\sqrt{3}$
Pătrat	$R\sqrt{2}$	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$2R^2$	$4R\sqrt{2}$
Hexagon regulat	R	$\frac{R\sqrt{3}}{2}$	$\frac{3R^2\sqrt{3}}{2}$	$6R$

PROBLEME REZOLVATE

1. Un triunghi echilateral este circumscris unui cerc $\mathcal{C}(O, r)$ și înscris în $\mathcal{C}(O, R)$. Dacă $R - r = 1$ cm, determinați aria triunghiului.

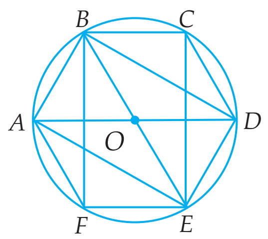
Soluție: Fie a latura triunghiului echilateral. Atunci $R\sqrt{3} = a$, de unde $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. Cum r este apotema triunghiului echilateral, avem că $r = \frac{R}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{6}$. Atunci $\frac{a\sqrt{3}}{3} - \frac{a\sqrt{3}}{6} = 1$ și, de aici, $a = 2\sqrt{3}$ cm. Aria triunghiului echilateral este $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, deci este egală cu $3\sqrt{3}$ cm².

2. Un pătrat are latura egală cu $(2 + \sqrt{2})$ cm. Calculați $R - r$, unde R este raza cercului circumscris pătratului, iar r este raza cercului înscris acestuia.

Soluție: Deoarece $R = \frac{l\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{2}}{2}$ cm $= (\sqrt{2} + 1)$ cm și $r = \frac{l}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{2}$, rezultă că $R - r = \frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

3. Fie $ABCDEF$ un hexagon regulat cu latura de 6 cm, înscris în $\mathcal{C}(O, R)$.

a) Determinați măsurile unghiurilor CBD, DBE, CBF și DBF.
b) Calculați lungimile segmentelor CE și CF.
c) Calculați ariile triunghiurilor BCD, DBE și BDF.
d) Calculați ariile patrulaterelor $BODC$, $ABCD$ și $ABDE$.



Soluție: a) Fiecare dintre cele șase arce mici $\overset{\frown}{AB}, \overset{\frown}{BC}, ..., \overset{\frown}{FA}$ are aceeași măsură (corespund unor coarde egale). Măsura fiecăruia este $360° : 6 = 60°$. Folosind teorema care dă

Editura Paralela 45

măsura unghiului înscris în cerc, avem $\sphericalangle CBD = \frac{\overset{\frown}{CD}}{2} = 30°$; $\sphericalangle DBE = \frac{\overset{\frown}{DE}}{2} = 30°$; $\sphericalangle CBF = \frac{\overset{\frown}{CF}}{2} = 90°$; $\sphericalangle DBF = \frac{\overset{\frown}{DF}}{2} = 60°$.

b) Din triunghiul dreptunghic BCE, cu $BC = 6$ cm și $BE = 12$ cm, obținem $CE = 6\sqrt{3}$ cm. CF este diametru în cerc, deci $CF = 12$ cm.

c) Triunghiul BCD este isoscel, $BC = CD = 6$ cm și $\sphericalangle BCD = 120°$. Înălțimea din C are lungimea de 3 cm. Rezultă că aria lui BCD este egală cu $9\sqrt{3}$ cm². Triunghiul DBE este dreptunghic, cu catetele $DE = 6$ cm și $BD = 6\sqrt{3}$ cm și are aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm². Triunghiul BDF este echilateral, cu latura $BD = 6\sqrt{3}$ cm și are aria egală cu $27\sqrt{3}$ cm².

d) $BODC$ este romb și are aria egală cu $18\sqrt{3}$ cm²; $ABCD$ este trapez isoscel și are aria egală cu $27\sqrt{3}$ cm²; $ABDE$ este dreptunghi și are aria egală cu $36\sqrt{3}$ cm².

Probleme propuse

1. Aflați raza cercului circumscris și apotema unui triunghi echilateral cu latura de:
   a) 6 cm; b) $12\sqrt{3}$ cm.
2. Determinați latura unui triunghi echilateral, știind că apotema sa este egală cu:
   a) 2 cm; b) $6\sqrt{3}$ cm.
3. Calculați aria unui triunghi echilateral, știind că raza cercului circumscris este:
   a) $2\sqrt{3}$ cm; b) 6 cm.
4. Aflați raza cercului circumscris unui triunghi echilateral, știind că aria sa este egală cu:
   a) $12\sqrt{3}$ cm²; b) $15\sqrt{3}$ cm².
5. Aflați raza cercului circumscris și apotema unui pătrat cu latura de:
   a) 4 cm; b) $2\sqrt{2}$ cm.
6. Determinați latura unui pătrat, știind că apotema sa este egală cu:
   a) 2 cm; b) $\sqrt{7}$ cm.
7. Calculați aria unui pătrat, știind că raza cercului circumscris este egală cu:
   a) 4 cm; b) $3\sqrt{2}$ cm.
8. Aflați raza cercului circumscris unui pătrat, știind că aria sa este egală cu:
   a) 18 cm²; b) 54 cm².
9. Aflați raza cercului circumscris și apotema unui hexagon regulat cu latura egală cu:
   a) 4 cm; b) $2\sqrt{3}$ cm.
10. Determinați latura unui hexagon regulat, știind că apotema sa este egală cu:
    a) $\sqrt{3}$ cm; b) 3 cm.

Editura Paralela 45

RECAPITULARE ŞI SISTEMATIZARE PRIN TESTE

Se acordă 1 punct din oficiu. Timp de lucru: 50 de minute.

TESTUL 1

(1p) **1.** Un dreptunghi are lungimea de 12 cm și lățimea de 5 cm. Aflați lungimea diagonalei.

(1p) **2.** Aflați aria unui triunghi echilateral cu înălțimea de $3\sqrt{3}$ cm.

(1p) **3.** Într-un romb, diagonalele au lungimile de 8 cm, respectiv 6 cm. Aflați perimetrul rombului.

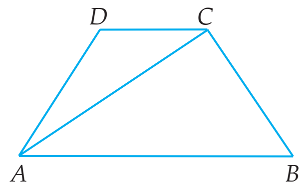
(1p) **4.** Se consideră triunghiul dreptunghic ABC cu $\sphericalangle BAC = 90°$, $AB = 8$ cm și $\text{tg} \sphericalangle C = \frac{8}{15}$. Calculați perimetrul triunghiului.

(1p) **5.** În cercul $\mathscr{C}(O, R)$, $R = 10$ cm, considerăm o coardă $AB = 16$ cm. Aflați distanța de la O la coardă.

(1p) **6.** Un pătrat este înscris în $\mathscr{C}(O, R)$, $R = 2$ cm. Aflați lungimea apotemei pătratului.

(1p) **7.** Determinați aria paralelogramului $ABCD$, dacă $AB = 2$ cm, $AD = 4$ cm și $\sphericalangle A = 60°$.

8. Fie $ABCD$ un trapez, în care $AB \parallel CD$, $AB = 13$ cm, $CD = 5$ cm, $AD = BC = 2\sqrt{13}$ cm.



(1p) **a)** Calculați aria trapezului $ABCD$.

(1p) **b)** Arătați că $AC \perp CB$.

TESTUL 2

(1p) **1.** Fie ABC un triunghi în care $AB = 5$ cm, $AC = 12$ cm și $BC = 13$ cm. Aflați mărimea unghiului BAC.

(1p) **2.** Calculați $\cos 45° \cdot \sin 45° - \sqrt{3} \sin 60° \cdot \cos 60°$.

(1p) **3.** Un dreptunghi are o latură de 4 cm și diagonala de 5 cm. Aflați aria dreptunghiului.

(1p) **4.** În triunghiul ABC dreptunghic în A, cunoaștem $AB = 9$ cm, iar $BC = 15$ cm. Aflați lungimea înălțimii AD.

(1p) **5.** Un triunghi ABC are $AB = AC = 13$ cm, iar $BC = 10$ cm. Calculați aria triunghiului.

Editura Paralela 45

PROBLEME RECAPITULATIVE

ALGEBRĂ

1. Determinați $\sqrt{x}$, știind că:

a) $x = 1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13$;

b) $x = \frac{5}{9} \cdot \left\{1 - \frac{1}{4} \cdot \left[1 - \frac{1}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{4} : \frac{5}{4}\right)\right]\right\}$.

2. Calculați:

a) $\sqrt{8} + \sqrt{18} - \sqrt{50}$;

b) $2\sqrt{27} + 3\sqrt{12} - 10\sqrt{3}$.

3. Fie trei puncte *A*, *B*, *C*, astfel încât $AB = \sqrt{605}$ cm, $BC = \sqrt{180}$ cm și $CA = \sqrt{125}$ cm. Arătați că punctele *A*, *B* și *C* sunt coliniare.

4. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{50} + 2\sqrt{98} - 3\sqrt{18}\right) : \sqrt{8}$ este natural.

5. Arătați că $a = \left(\sqrt{2} + \sqrt{72}\right) : \left(\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{32}\right)$ este număr rațional.

6. Calculați:

a) $\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{3}} + \frac{2}{\sqrt{6}}\right) \cdot \sqrt{6}$;

b) $\left(\sqrt{2} + \frac{3}{\sqrt{2}}\right) : \left(\sqrt{2}\right)^{-1}$.

7. Calculați:

a) $3 \cdot (3{,}5 - 0{,}25 \cdot 10) - \left(\sqrt{5} - \frac{2{,}5}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5}$;

b) $(-1)^9 + 2\frac{1}{2} : \sqrt{0{,}25} - \frac{20}{\sqrt{300}} + \frac{\sqrt{48}}{6}$.

8. Arătați că numărul $a = \left(\sqrt{3} + \frac{15}{\sqrt{3}}\right) \cdot \sqrt{3} - \left(\sqrt{5} - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \cdot \sqrt{5} + \left(\frac{3}{2\sqrt{2}} + \frac{2}{3\sqrt{2}}\right) : \frac{1}{\sqrt{72}}$ este cubul unui număr natural.

9. Fie numerele reale $a = \left(\frac{4}{\sqrt{3}} - \frac{7}{\sqrt{2}}\right) \cdot \sqrt{6} + \left|12 - 7\sqrt{3}\right|$ și $b = \sqrt{6^2 + 8^2} - \frac{8}{\sqrt{2}}$.

a) Arătați că $a = 4\left(\sqrt{2} - 3\right)$.

b) Calculați $(a + b)^{10}$.

10. Fie $a = \left(\sqrt{8} + \sqrt{2}\right) \cdot \left(\sqrt{27} - \sqrt{3}\right)$ și $b = \sqrt{2} \cdot \left(\sqrt{12} + 2\sqrt{75}\right) : \left(\sqrt{2} + 2\sqrt{8} - \sqrt{18}\right)$. Arătați că numărul $\left(a\sqrt{2}\right) : b$ este număr natural.

11. Ordonați crescător numerele reale:

a) $a = 7$, $b = 4\sqrt{3}$, $c = 2\sqrt{13}$ și $d = 5\sqrt{2}$;

b) $t = -3\sqrt{2}$, $x = -4$, $y = -2\sqrt{5}$ și $z = -5$.

Editura Paralela 45

GEOMETRIE

1. Un patrulater $ABCD$ are măsurile unghiurilor A, B, C, D direct proporționale cu 10, 5, 6, respectiv 3. Determinați măsura unghiului A.

2. Calculați perimetrul patrulaterului $ABCD$, știind că $\sphericalangle A = \sphericalangle C$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D$, $AB = 6$ cm și $BC = 8$ cm.

3. Paralelogramul $ABCD$ are $AD = BD$ și $\sphericalangle ADB = 90°$. Aflați măsura unghiului ABC.

4. Calculați aria patrulaterului $MNPQ$, știind că $MP = 12$ dm, $NQ = 8$ dm și $MP \perp NQ$.

5. Calculați perimetrul unui romb ale cărui diagonale au lungimile de 8 cm și 6 cm.

6. Fie O punctul de intersecție a diagonalelor paralelogramului $ABCD$, cu $AC = 4$ cm și $BD = 6$ cm. Calculați aria lui $ABCD$, știind că triunghiurile AOB și BOC au perimetrele egale.

7. Se consideră patrulaterul $ABCD$ cu diagonalele $AC < BD$ și $AC \perp BD$. Fie M, N, P, Q mijloacele laturilor AB, BC, CD, respectiv DA. Stabiliți natura patrulaterului $MNPQ$.

8. a) Calculați aria unui pătrat cu diagonala de $2\sqrt{2}$ cm.

b) Calculați aria unui triunghi echilateral cu latura de 12 dam.

9. Se consideră un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ cu centrul în O și raza $r = 10$ cm. Aflați lungimea coardei AB a cercului $\mathscr{C}(O, r)$, care subîntinde un arc de 120°.

10. Fie A, B, C trei puncte pe cercul $\mathscr{C}$, astfel încât $\sphericalangle BAC = 36°$. Determinați măsurile celor două arce ale cercului $\mathscr{C}$ care au extremitățile B și C.

11. Fie un cerc $\mathscr{C}(O, r)$ cu centrul în O și raza $r = 5$ m. Punctul P se află la distanța de 13 m de punctul O. Calculați lungimea uneia dintre tangentele duse din P la cercul $\mathscr{C}$.

12. Două cercuri $\mathscr{C}(O)$ și $\mathscr{C}(Q)$, cu centrele în O, respectiv Q, se intersectează în punctele A și B. Calculați aria triunghiului OAQ, știind că $OQ = 12$ cm și $AB = 8$ cm.

13. Calculați aria unui triunghi ABC cu $AB = AC = 5$ cm și $BC = 6$ cm.

14. a) Calculați aria trapezului dreptunghic $ABCD$, știind că $AB \parallel CD$, $\sphericalangle A = 90°$, $AB = 4$ cm, $BC = 5$ cm și $CD = 1$ cm.

b) Calculați aria trapezului isoscel $ABCD$, știind că $AB \parallel CD$, $AB = 7$ cm, $CD = 1$ cm, $AD = BC = 5$ cm.

15. Se consideră triunghiul ABC și punctele $M \in AB$, $N \in AC$, astfel încât $MN \parallel BC$. Dacă $AM = 2$ cm, $AB = 6$ cm, $BC = 9$ cm și $AC = 12$ cm, determinați lungimile segmentelor MN și AN.

16. Se consideră un dreptunghi $ABCD$ cu $AB = 6$ cm și $AD = 9$ cm. Fie $M \in AB$, $N \in BC$, astfel încât $AM = MB$ și $BN = 1$ cm. Aflați valoarea raportului $\frac{DM}{MN}$.

17. Se consideră paralelogramul $ABCD$ cu diagonala $BD = 18$ cm. Dacă M este mijlocul laturii BC și $\{P\} = AM \cap BD$, aflați lungimea segmentului BP.

Editura Paralela 45

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI

PROBLEME RECAPITULATIVE. CLASA A VI-A

ARITMETICĂ

1. $A = \{4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $B = \{0, 1, 4, 9\}$; $A \cup B = \{0, 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $A \cap B = \{4, 9\}$; $A \setminus B = \{5, 6, 7, 8\}$; $B \setminus A = \{0, 1\}$. **2.** $X = \{1, 5, 7, 9, 10\}$ și $Y = \{3, 4, 5, 7, 9\}$. **3.** $\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B - \text{card}(A \cap B) = 41$. **4.** a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{2, 5\}$, $\{2, 7\}$, $\{2, 9\}$; b) A are 6 submulțimi cu cinci elemente; c) $2^6 = 64$. **5.** $a = 2^3 \cdot 3^2$, $b = 3 \cdot 5^2$, $c = 7 \cdot 13$, $d = 2 \cdot 3 \cdot 23$. Numărul a are cei mai mulți divizori naturali. **6.** $n = 12$. **7.** $(a; b) = 12$, $[a; b] = 2520$. **8.** Cel mai mare divizor comun al celor două numere este $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$. Deci, numerele 126 și 420 au opt divizori comuni. **9.** Din relațiile $248 = na + 14$ și $107 = nb + 17$ ($a, b \in \mathbb{N}$, $n > 17$) obținem $234 = na$ și $90 = nb$, deci n este divizor comun al numerelor 234 și 90. Cum $n > 17$, rezultă că $n = 18$. **10.** Cel mai mic multiplu comun al numerelor 24 și 36 este 72. Numerele cerute sunt: $72 \cdot 0$, $72 \cdot 1$, $72 \cdot 2$, $72 \cdot 3$ și $72 \cdot 4$. **11.** Numărul căutat, n, este cel mai mic multiplu comun al numerelor 8, 12 și 18, deci $n = 72$. **12.** Notăm numărul de mere cu m. Din relațiile $m = 3a + 1 = 4b + 1$ ($a, b \in \mathbb{N}^*$) rezultă că $m - 1$ este multiplu de 12, ceea ce, având în vedere că $4m < 100$, ne conduce la concluzia că $m = 13$. **13.** a) 21 de băieți; b) 30 de elevi. **14.** 2400 lei. **15.** a) $\frac{2}{11}$; b) $\frac{3}{4}$. **16.** Fie A, B și C măsurile unghiurilor triunghiului considerat. Avem $\frac{A}{1} = \frac{B}{5} = \frac{C}{6} = \frac{A+B+C}{12} = \frac{180°}{12} = 15°$, deci $C = 6 \cdot 15° = 90°$. **17.** a) Din relația $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} = k$ ($k \in \mathbb{Q}$, $n > 0$) obținem $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 4k$, deci $n = 3k \cdot \frac{3}{k} = 9 \in \mathbb{N}$; b) Având în vedere cele stabilite la punctul a), observăm că $\frac{a+c}{2} = \frac{2k+4k}{2} = 3k = b$. **18.** Avem $3a = 4b = 6c = k$ ($k \in \mathbb{N}^*$), de unde rezultă că $a = \frac{k}{3}$, $b = \frac{k}{4}$, $c = \frac{k}{6}$ și k este multiplu de 12. Înlocuind în inegalitatea din enunț, obținem $\frac{2k}{3} + \frac{3k}{4} - \frac{4k}{6} < 15$, deci $k < 20$, de unde $k = 12$ (deoarece $k \vdots 12$). Deci, $a = 4$, $b = 3$, $c = 2$. **19.** Din relațiile $\frac{a}{2} = \frac{b}{3}$ și $b \cdot \frac{1}{6} = c \cdot \frac{1}{2}$ rezultă că $\frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{1}$. a) Avem $c = \frac{1}{2}a = 50\%a$; b) Înlocuind în egalitatea din ipoteză, obținem $6c^2 + 3c^2 + 2c^2 = 176$, deci $c = 4$ și $a = 8$, $b = 12$. **20.** a) Din egalitatea $\frac{\overline{ab}}{5} = \frac{\overline{bc}}{4}$, rezultă că $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$, de unde obținem $5 \mid \overline{ab}$, deci $b = 5$ (căci $b \neq 0$); b) Relația $4\overline{ab} = 5\overline{bc}$ este echivalentă cu $8a = 46 + c$, de unde rezultă că $a = 6$, $c = 2$. Avem $\overline{ab} = 65$, $\overline{bc} = 52$. **21.** a) 25; 9; b) 7,00. **22.** a) $210 - 165 = 45$; b) $p = \frac{26}{100} = \frac{13}{50}$. **23.** Deoarece $A = \{102, 111, 120,$

Editura Paralela 45

TESTE INIȚIALE

Testul 1. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** B. **5.** D. **6.** A. **7.** D. **8.** C. **II. 1.** $x = 3$. **2.** $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$. **3.** $\measuredangle CBD = 15°$. **4.** a) Deoarece triunghiul ABC este echilateral și D este mijlocul lui BC, rezultă că $\measuredangle BAD = \measuredangle DAC = 30°$. Triunghiul AOE este isoscel cu baza AE, căci $OA = OE$ (fiind raze ale cercului considerat), deci $\measuredangle AOE = 180° - 2 \cdot 30° = 120°$. Așadar, arcul mic AE are măsura de 120°. Cum dreapta BC este perpendiculară în D pe raza OD, rezultă că cercul este tangent dreptei BC; b) Analog, obținem că $\measuredangle AOF = 120°$. Din congruența triunghiurilor AOE și AOF ($AO = AO$, $OE = OF$, $\measuredangle AOE = \measuredangle AOF = 120°$) deducem că $AE = AF$. Deoarece $AE = AF$ și AD este bisectoarea unghiului EAF, rezultă că $AD \perp EF$ și, cum avem și $AD \perp BC$, înseamnă că $BC \parallel EF$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** C. **4.** A. **5.** C. **6.** B. **7.** C. **8.** B. **II. 1.** $a = \frac{4}{3}$; $b = 2$; $c = \frac{8}{3}$. **2.** $A = \{-2, -1, 0, 1\}$; $S = -2$; $P = 0$. **3.** Ultima cifră a lui N este 3, deci restul cerut este 3. **4.** a) În triunghiul isoscel ABC, mediana bazei AM este atât înălțime, cât și bisectoare. Triunghiul AMC este dreptunghic și MN este mediana ipotenuzei, deci $AC = 2MN = 10$ cm; cu teorema lui Pitagora, $AM = 8$ cm. Atunci $\mathscr{P}_{ABC} = 2 \cdot 10 + 12 = 32$ cm; b) Triunghiul APN este isoscel și AM este bisectoarea unghiului din vârf, prin urmare $AM \perp PN$.

Testul 2. **I. 1.** B. **2.** C. **3.** B. **4.** D. **5.** C. **6.** A. **7.** C. **8.** A. **II. 1.** $a = 7{,}5$ și $b = 2{,}5$. **2.** 1125 lei. **3.** $P = (1 \cdot 24) \cdot (2 \cdot 12) \cdot (3 \cdot 8) \cdot (4 \cdot 6) = \left(2^3 \cdot 3\right)^4 = 2^{12} \cdot 3^4$. **4.** a) $\measuredangle A = 180° - 2 \cdot \measuredangle B = 108°$; b) Cum $DA = DC$ (D se află pe mediatoarea lui AC), avem $\measuredangle DAC = \measuredangle C = 36°$. Rezultă că $\measuredangle BAD = \measuredangle BAC - \measuredangle DAC = 72°$, $\measuredangle BDA = 180° - \measuredangle B - \measuredangle BAD = 72°$, deci triunghiul BAD este isoscel, cu $BA = BD$.

ALGEBRĂ

CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE

I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect

1. 121, 144, 169, 196, 225, 400 și 25600. **2.** 2^{10}, $2^6 \cdot 3^2$, $2^8 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $3^{22} \cdot 5^{14}$, $2^{2n} \cdot 7^{4n+2}$. **3.** $225 = 15^2$, $256 = 16^2$, $289 = 17^2$, $324 = 18^2$, $361 = 19^2$, $400 = 20^2$, $441 = 21^2$ și $484 = 22^2$. **4.** a) $25 = 5^2$, $36 = 6^2$, $81 = 9^2$, $100 = 10^2$, $900 = 30^2$; b) $5^4 = (5^2)^2$, $2^6 = (2^3)^2$, $12^{10} = (12^5)^2$, $6^{2n} = (6^n)^2$, $13^{4n+6} = (13^{2n+3})^2$. **5.** a) 5^2; b) 13^2; c) $(2 \cdot 3^3)^2$; d) $(2^5)^2$; e) $(2^3 \cdot 3^4)^2$; f) $(2^5 \cdot 3^4)^2$. **6.** a) 12^2; b) 25^2; c) $(3 \cdot 2^{25})^2$; d) $(2 \cdot 3^{24})^2$. **7.** Mulțimea $A = \{0^2, 1^2, 2^2, \ldots, 30^2, 31^2\}$ are 32 de elemente. **8.** a) Dacă $x \in \mathbb{N}$, atunci $u(x^2) \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$; b) Cum $u(5n + 2)$, $u(5n + 7) \in \{2, 7\}$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$, rezultă că $5n + 2$ și $5n + 7$ nu sunt pătrate perfecte. **9.** Deoarece $u(3^{45}) = u(3^{44} \cdot 3) = u(81^{11} \cdot 3) = 3$ și $u(2^{62}) = u(2^{60} \cdot 2^2) = u(16^{15} \cdot 4) = 4$, rezultă că $u(a) = 7$, deci a nu este pătrat perfect. **10.** a) 2, 8, 9, 14, 50; b) 2, 3^3, $2 \cdot 5^3$, $6^2 \cdot 3^4 = 2^2 \cdot 3^6$, $2 \cdot 3^3 \cdot 5^2$; c) 2^n, 3^{2m}, $2^n \cdot 5^{3m}$, 7^{2n+1}, 2^{3m-2}; d) $2 \cdot 3^6$; $2^7 \cdot 3$; $2^4 \cdot 3^7$; $3 \cdot 7^{15}$; $2 \cdot 3^{10}$. **11.** a) 15, 21, 24; b) 42, 56, 84; c) 102, 225, 254. **12.** a) 5; b) 2; c) 5; d) 2; e) 20; f) 80; g) 2; h) 1. **13.** a) 6; b) 2; c) 8; d) 12; e) 48; f) 25; g) 13; h) $12 \cdot 7^5$. **14.** a) $x = 225$; b) $x = 258$; c) $x =$

Editura Paralela 45

Testul 3. **1.** O latură a foii are 8 cm $(16 \cdot 0{,}5)$. **2.** $n = 15 \in \mathbb{N}$. **3.** Cum $\sqrt{500} = 22{,}36\ldots$, înseamnă că $a = 22$ este o aproximare mai bună decât $b = 23$. **4.** Deoarece $a = 8 + 3\sqrt{2}$, $b = 8 + 2\sqrt{5}$ și $3\sqrt{2} < 2\sqrt{5}$, rezultă că $a < b$. **5.** $x = \frac{25}{6}$. **6.** $a = \frac{7}{2} \in \mathbb{Q}$. **7.** $x = 7$, $y = -5$. **8.** a) $a^2 + b^2 = 8$ și $a \cdot b = 1$; b) $x^2 = 6 \in \mathbb{N}$ și $x + \sqrt{6} = 0 \in \mathbb{N}$.

CAPITOLUL II. ECUAŢII ŞI SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

II.1. Transformarea unei egalităţi într-o egalitate echivalentă. Identităţi

2. 68. **3.** 25. **4.** a) $3a + 2 = 5b \mid -3 \Rightarrow 3a - 1 = 5b - 3$; b) $3a + 2 = 5b \mid :15 \Rightarrow \frac{a}{5} + \frac{2}{15} = \frac{b}{3}$; c) $3a + 2 = 5b \mid \cdot b \Rightarrow 3ab + 2b = 5b^2$; d) $3a + 2 = 5b \mid \cdot 3a \Rightarrow 9a^2 + 6a = 15ab$. **5.** 0. **6.** -2; $-\frac{1}{2}$; $\frac{5}{6}$. **7.** -1. **8.** $\frac{2}{3}$. **9.** $-\frac{11}{14}$. **10.** Este falsă: $3 \cdot 4 = 2 \cdot 6$ și $3 \neq 2$, $4 \neq 6$. **11.** 34. **12.** 30. **14.** 50; -45; 0. **15.** Scăzând egalitățile date, obținem $a - c = 2c - 2a$, deci $a = c$, apoi $b = 2c - a = a$. **16.** Din $\frac{a}{b} = \frac{d}{c} = \frac{a+d}{b+c} = 1$ rezultă $a = b$, $d = c$. **17.** a) $|2| = |-2|$ și $2 \neq -2$; b) Din $a \cdot b \geq 0$ rezultă $a \geq 0$ și $b \geq 0$ sau $a \leq 0$, $b \leq 0$. În primul caz, din $|a| = |b|$ rezultă $a = b$, iar în al doilea caz, rezultă $-a = -b$, deci $a = b$. **21.** Deoarece $a + b + c = 0$, rezultă că $a^2 + ab + ac = a(a + b + c) = 0$.

II.2. Ecuaţii de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulţimea soluţiilor unei ecuaţii. Ecuaţii echivalente

2. a) $x - 2 = 0$; b) $4x + 3 = 0$; c) $5x - 2 = 0$; d) $6x + 1 = 0$. **3.** a) $x = 2$; b) $x = 2$; c) $x \in \varnothing$; d) $x \in \varnothing$; e) $x = 20$; f) $x = -\frac{1}{5}$. **4.** a) $\frac{3}{5}$; b) 3; c) 3; d) 8; e) 0; f) 3; g) 6; h) $\frac{2}{3}$. **5.** a) 3; b) -4; c) 3; d) -1. **6.** a) 1; b) -3; c) 1; d) $\frac{6}{7}$. **7.** a) $S = \{0\}$; b) $S = \{2\}$; c) $S = \{-1\}$; d) $S = \left\{\frac{1}{2}\right\}$. **8.** a) $\frac{5}{14}$; b) 0; c) 2; d) -2. **9.** a) $S = \left\{\frac{2}{3}\right\}$; b) $S = \{-3\}$; c) $S = \left\{-\frac{48}{43}\right\}$; d) $S = \mathbb{R}$. **10.** a) 4; b) 1; c) -3; d) $\frac{7}{20}$. **11.** a) $S = \{2\}$; b) $S = \{9\}$; c) $S = \{15\}$; d) $S = \{-1\}$. **12.** a) $S = \{\sqrt{2}\}$; b) $S = \{1\}$; c) 2; d) 1. **13.** a) $S = \{3\}$; b) $S = \{-2\}$; c) $\sqrt{2}$; d) $\sqrt{6}$. **14.** a) $x = \frac{1}{10}$; b) $x = -\frac{17}{29}$. **15.** a) -6; b) -4; c) -2; d) 4. **16.** a) $S = \left\{\frac{1}{3}\right\}$; b) $S = \{1\}$; c) $S = \varnothing$; d) $S = \mathbb{R}$. **17.** Ecuațiile au soluția $x = -\frac{1}{7}$. **18.** a) $a = 3$; b) $a = 2$. **19.** $A = \{5\}$; $B = \left\{\frac{1}{6}\right\}$; $A \cup B = \left\{\frac{1}{6}, 5\right\}$; $A \cap B = \varnothing$. **20.** Cum $A = \{2\}$, avem $B = \{2\}$ dacă și numai dacă $(a + 2) \cdot 2 - a = 1$, deci $a = -3$. **21.** $4x - 1 \in \{-21, -7, -3, -1, 1, 3, 7, 21\}$; $A = \{-5, 0, 1, 2\}$. **22.** $x = \frac{2}{a-1}$, $a - 1 \in \{1, 2\}$, deci $a \in \{2, 3\}$. **23.** a) $x = 1$; b) $x = 2$. **24.** a) $S = \{-3, 7\}$; b) $S = \{-2, 1\}$; c) $S = \varnothing$; d) $S = \left\{-1, \frac{5}{3}\right\}$.

Editura Paralela 45

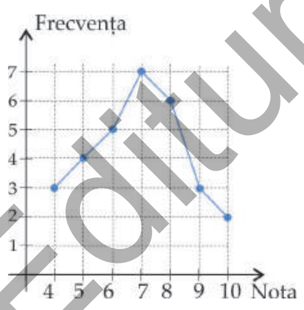
Testul 2. **1.** 1. **2.** –1. **3.** 11. **4.** 40 km. **5.** Soluțiile sunt $(x, 101 - 4x)$, $x \in \{0, 1, 2, ..., 25\}$, deci 26 de soluții. **6.** $x + y - 1 = 0$ și $2x + y - 4 = 0$, deci $x = 3$, $y = -2$. **7.** $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **8.** a) Fie x prețul inițial. După prima micșorare de preț, telefonul costă $\frac{9x}{10}$ lei, iar după a doua $\frac{153x}{200}$ lei, deci $\frac{153x}{200} = 153$, de unde obținem $x = 200$ lei; b) Dacă $p\%$ este procentul căutat, din $200 - p\% \cdot 200 = 153$ obținem $p\% = 23{,}5\%$.

Testul 3. **1.** 15. **2.** –1. **3.** $a = 2$. **4.** a) $x = -2$; b) $x = -1$ sau $x = -\frac{3}{5}$. **5.** 129 lei. **6.** Fie x, y numărul meselor cu 3 picioare, respectiv numărul meselor cu 4 picioare. Atunci $x + y = 30$ și $3x + 4y = 106$. Rezultă $x = 14$, $y = 16$. **7.** $(a, b) \in \{(5, 0); (2, 4); (1, 16); (-4, -4); (-1, -8); (0, -20)\}$. **8.** $x = 1$, $y = -2$.

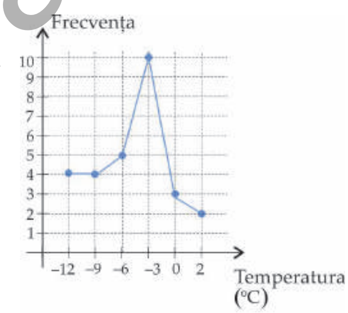
Capitolul III. Elemente de organizare a datelor

III.1. Date statistice – recapitulare şi completări. Poligonul frecvenţelor

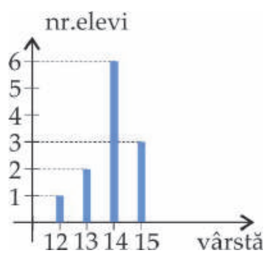
1. a) 20 elevi; b) 13 ani. **2.** a) 56 lei; b) 8 lei/zi. **3.** a) 80 copii; b) 85 copii; c) 250 copii; d) 800 copii. **4.** a) 3 053 080 000 locuitori; b) În 1800, locuiau în orașe 24 920 000 oameni. Populația urbană a crescut de 122,5 ori. **5.** a) 9 elevi; b) 10 elevi; c) 27 elevi. **6.** a) În anul 2007; b) 30 milioane lei. **7.** a) 4 băieți; b) 16 băieți; c) 19 băieți. **8.** a) Cu 1 milion; b) 2,5 milioane. **9.** a) 40%; b) 4, 3, respectiv 5 probleme. **10.** a) 25%; b) 7 ha. **11.** a) 20 vizitatori; b) Sâmbătă și duminică; c) Luni. **12.** a) Duminică; b) Marți și miercuri; c) 30°C; d) Mai, iunie, iulie sau august. **13.** a) 39,5°C; b) După 36 ore; c) 4 zile; 37°C. **14.** a) 4, respectiv 6; b) Notele 4 și 9; c) Vezi diagrama de mai jos. **15.** a) Nu: 2020 este an bisect, deci luna februarie are 29 de zile; b) –5°C; c) Vezi figura de mai jos. **16.** a), b), c), d) Vezi figurile de mai jos.



Problema 14 c)



Problema 15 c)



Problema 16 a)

Editura Paralela 45

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex

3. $\frac{1}{3}$. **4.** 10 m, 11 m, 12 m, 13 m. **5.** Lungimea traseului este 350 m, iar lungimea pasului este 70 cm. **6.** 27,5 cm. **7.** $\mathcal{P}_{ABCD} = 19$ cm. **10.** $\sphericalangle A = 150°$; $\sphericalangle B = 45°$; $\sphericalangle C = 105°$; $\sphericalangle D = 60°$. **11.** 90°. **12.** 36°; 72°; 108°; 144°. **13.** 144°; 96°; 72°; 48°. **14.** a) Fie *ABCDE* un pentagon. Trasăm diagonalele *AC* și *AD*. Avem $\sphericalangle A + \sphericalangle B + \sphericalangle C + \sphericalangle D + \sphericalangle E = (\sphericalangle BAC + \sphericalangle B + \sphericalangle BCA) + (\sphericalangle CAD + \sphericalangle ACD + \sphericalangle ADC) + (\sphericalangle DAE + \sphericalangle ADE + \sphericalangle E) = 180° + 180° + 180° = 540°$; b) Analog, obținem rezultatul 720°. **15.** Se aplică teorema lui Pitagora în ΔBCD și în ΔABD. Obținem: $BD = 12$ cm, $AD = 9{,}6$ cm, $\mathcal{P}_{ABCD} = 34{,}8$ cm. **16.** Se aplică teorema lui Pitagora în triunghiurile *AOB*, *BOC*, *COD*, *DOA*. Obținem: $AB = AD = 13$ cm, $BC = CD = 20$ cm; $\mathcal{P}_{ABCD} = 66$ cm. **17.** Punctele *A* și *C* sunt egal depărtate de capetele segmentului *BD*, deci se află pe mediatoarea acestuia. **18.** În ΔABC, mediana *BM* este egală cu jumătate din latura pe care cade, prin urmare $\sphericalangle B = 90°$. Analog, $\sphericalangle D = 90°$. **19.** a) Punctele *A* și *C* se află pe mediatoarea lui *BD*, deci $AB = AD$ și $CB = CD$. Aplicăm LLL; b) Triunghiurile *OAB* și *BAC* sunt 90°-60°-30°, deci $AO = \frac{1}{2}AB = 3$ cm, $AC = 2AB = 12$ cm. Obținem că $OC = 9$ cm. **20.** a) ΔABC este echilateral, deci $\sphericalangle BAC = 60°$, de unde $\sphericalangle CAD = 45°$. Din $\sphericalangle CAD = \sphericalangle CDA = 45°$ obținem că $AC = CD$; b) Avem $BC = AC = CD$, așadar ΔBCD este isoscel, cu unghiul din vârf $\sphericalangle C = 150°$. Găsim că $\sphericalangle DBC = 15°$. **21.** Notăm $\sphericalangle BAP = \sphericalangle PAD = a$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = b$, $\sphericalangle BCQ = \sphericalangle QCD = c$; atunci $2a + 2b + 2c = 360°$, deci $a + b + c = 180°$. Unghiul *APC* este exterior triunghiului *APD*, așadar $\sphericalangle APC = a + b$. Deducem că $\sphericalangle QCP + \sphericalangle APC = c + (a + b) = 180°$, prin urmare $AP \parallel CQ$.

IV.2. Paralelogramul

1. 1200 m. **2.** $AD = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm. **3.** 10 dm. **4.** $\sphericalangle C = 48°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 132°$. **5.** $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 108°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 72°$. **6.** a) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 45°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 135°$; b) $\sphericalangle A = \sphericalangle C = 100°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 80°$. **7.** $AC = 8$ cm, $BD = 6$ cm. **8.** $\sphericalangle AOB = 100°$; $\sphericalangle BDC = 50°$; $\sphericalangle A = 70°$; $\sphericalangle B = 110°$. **9.** $BC = 5$ cm, $AB = CD = 10$ cm, $\sphericalangle C = 60°$, $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 120°$. **10.** a) *D* este simetricul lui *B* față de mijlocul lui *AC*; b) *D* este simetricul lui *A* față de mijlocul lui *BC*. **13.** Avem $\sphericalangle BMP = \sphericalangle C$ (alt. int.) $\Rightarrow \sphericalangle BMP = \sphericalangle B \Rightarrow PM = PB$ și, analog, $NM = NC$. Atunci $\mathcal{P}_{APMN} = AP + PM + NM + AN = AP + PB + CN + AN = AB + AC = 20$ cm. **14.** Notăm $PN \cap CD = \{S\}$; atunci *MNSD* și *PQRS* sunt paralelograme, deci $MN + PQ = DS + SR = DR$, iar $NP + QR = NP + PS = NS = MD$, de unde rezultă concluzia. **15.** Fie *AP* și *BP* bisectoare ale unghiurilor *A* și *B* ale paralelogramului *ABCD*. Avem $\sphericalangle PAB + \sphericalangle PBA = \frac{1}{2}(\sphericalangle A + \sphericalangle B) = \frac{1}{2} \cdot 180° = 90°$, de unde $\sphericalangle APB = 180° - 90° = 90°$. Fie *AE* și *CF* bisectoarele unghiurilor *A*, respectiv *C*, $E \in DC$, $F \in AB$. Avem $\sphericalangle DEA = \sphericalangle EAB = \frac{1}{2}\sphericalangle A = \frac{1}{2}\sphericalangle C = \sphericalangle DCF$, deci $AE \parallel CF$. **16.** Fie *AP* și *BP* cele două bisectoare, cu $P \in CD$. Cum $\sphericalangle DPA = \sphericalangle PAB$ (alt. int.) și $\sphericalangle PAB = \sphericalangle PAD$, deducem că $DA = DP$. Analog, $CP = CB$. Obținem $\mathcal{P}_{ABCD} = 21$ cm. **17.** a) Segmentele *CD* și *EF* sunt paralele și egale; b) Folosim

Editura Paralela 45

AC este mediatoarea segmentului MN; b) N se află pe mediatoarea lui AC, deci $NA = NC$, de unde $\sphericalangle NAC = \sphericalangle NCA$. Însă $\sphericalangle NCA = \sphericalangle CAB$ (alt. int.), deci $\sphericalangle NAC = \sphericalangle CAB$.

Testul 2. **2.** $\mathscr{P} = 16$ cm; $\mathscr{A} = 15$ cm^2. **3.** $\sphericalangle ABC = 140°$, $\sphericalangle BCA = 20°$. **4.** $B = 13$ cm, $b = 7$ cm. **5.** 48 de plăci. **6.** a) $AM \parallel CD$, $AM = CD$ și $AD = AM$; b) Avem $AC \perp DM$ (diagonale în rombul $AMCD$) și $DM \parallel BC$ ($BCDM$ este un paralelogram), prin urmare $AC \perp BC$. **7.** a) AO și DM sunt mediane în ΔABD; b) $\mathscr{A}_{ADP} = \frac{1}{3} \cdot \mathscr{A}_{ADB} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \mathscr{A}_{ABCD} = 10$ cm^2.

Testul 3. **2.** 143 cm^2. **3.** $\sphericalangle C = 73°$; $\sphericalangle B = \sphericalangle D = 107°$. **4.** $67°30'$. **5.** Cartea are 125 foi, fiecare cu aria de 300 cm^2, deci avem nevoie de 3,75 m^2 hârtie. Cele patru coli au împreună 3,6 m^2, deci nu ajung. **6.** a) $AD = CB$, $DN = BM$ și $\sphericalangle D = \sphericalangle B$; aplicăm LUL; b) $AM \parallel CN$, $AM = CN$, deci $AMCN$ este paralelogram. Rezultă că $AN \parallel CM$. **7.** a) $\sphericalangle AMD = 180° - 90° - 30° = 60°$, deci $\sphericalangle CDM = 60°$. Cum $\Delta DAM \equiv \Delta CBM$ (CI), avem $MD = MC$. Triunghiul MCD este isoscel și are un unghi de 60°, deci este echilateral; b) În ΔDAM avem $\sphericalangle D = 90°$, $\sphericalangle A = 30°$, deci $DM = \frac{1}{2}AM$, de unde $AM = 2CD$ și $AB = 4CD$. Avem $\mathscr{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}(AB + CD) \cdot d(AB, CD) = \frac{1}{2} \cdot 5CD \cdot d(M, CM) = 5 \cdot \mathscr{A}_{MCD}$.

Capitolul V. Cercul

V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a

1. b) Sunt o infinitate de cercuri. Fiecare cerc cu centrul într-un punct O, $O \neq P$, și raza OP, trece prin punctul P. **2.** b) Sunt o infinitate de cercuri. Centrele lor se află pe mediatoarea segmentului AB. **3.** a) Nu există niciun cerc care să treacă prin A, B, C; b) Există un singur cerc care trece prin A, B, C. Centrul său este punctul de intersecție a mediatoarelor triunghiului ABC. **4.** Fântâna trebuie săpată în centrul cercului care trece prin A, B, C (considerăm casele ca niște puncte). Ea va fi plasată în punctul de intersecție a mediatoarelor segmentelor AB și AC. **5.** Se consideră trei puncte, A, B, C, pe circumferința amfiteatrului. Punctul de intersecție dintre mediatoarele segmentelor AB și BC este centrul amfiteatrului. **6.** Cum $OA = OC$, $OB = OD$ și $AC \perp BD$, rezultă că $ABCD$ este romb. În plus, $AC = BD = 2r$, deci $ABCD$ este pătrat. **7.** $B, D \in \mathscr{C}(A, r)$, $C \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(A, r)$, $O \in \text{Int}\,\mathscr{C}(A, r)$. **8.** a) $AB = 10$ cm $> r \Rightarrow B \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(A, r)$; $AD = 6$ cm $= r \Rightarrow D \in \mathscr{C}(A, r)$; $AE = 5$ cm $< r \Rightarrow E \in \text{Int}\,\mathscr{C}(A, r)$; b) $DA = 6$ cm $= r \Rightarrow A \in \mathscr{C}(D, r)$; $DB = DC = 8$ cm $> r \Rightarrow B, C \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(D, r)$; $DE = 5$ cm $< r \Rightarrow E \in \text{Int}\,\mathscr{C}(D, r)$. **9.** $AD = 6$ cm $= r \Rightarrow D \in \mathscr{C}(A, r)$; $AB = 8$ cm $> r \Rightarrow B \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(A, r)$; $AC = 10$ cm $> r \Rightarrow C \in \text{Ext}\,\mathscr{C}(A, r)$; $AO = 5$ cm $< r \Rightarrow O \in \text{Int}\,\mathscr{C}(A, r)$. **10.** Fie O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 centrele celor cinci cercuri. Cum cercurile desenate au aceeași rază r, rezultă că $PO_1 = PO_2 = PO_3 = PO_4 = PO_5 = r$, deci centrele lor sunt conciclice. **11.** a) Deoarece $AM = AN = BM = BN = r$, rezultă că $AMBN$ este romb. Diagonalele unui romb se înjumătățesc și sunt perpendiculare, deci MN este mediatoarea lui AB; b) Fiind dat un segment AB, construim cercurile $\mathscr{C}(A, r)$ și $\mathscr{C}(B, r)$, unde $r > \frac{AB}{2}$. Dacă $\{M, N\} = \mathscr{C}(A, r) \cap \mathscr{C}(B, r)$, atunci dreapta MN este mediatoarea segmentului AB. **12.** Deoarece $OA = OB = AC = BC = r = 2$ cm, rezultă că $OACB$ este romb, deci OC este bisectoarea unghiului xOy. **13.** Triunghiurile OCD și OBA sunt

Editura Paralela 45

$\frac{OA}{OB} = 6 = \frac{OC}{OD}$, rezultă că $AC \parallel BD$, deci $\sphericalangle CAO = \sphericalangle DBO$ (alterne interne). **8.** a) Cum $OA \perp AB$ și $QB \perp AB$, rezultă că $OA \parallel QB$, deci $\Delta AOP \sim \Delta QBP$ (teorema fundamentală a asemănării); b) Din asemănarea triunghiurilor AOP și QBP deducem că $\frac{OP}{PQ} = \frac{OA}{QB} = \frac{1}{5}$, de unde, având în vedere că $OP + PQ = 30$, obținem $OP = 5$ cm și $PQ = 25$ cm. Aplicând teorema lui Pitagora în triunghiurile OAP și QBP, găsim $PA = 4$ cm și $PB = 20$ cm, deci $AB = 24$ cm.

Capitolul VII. Relaţii metrice în triunghiul dreptunghic

VII.1. Proiecţii ortogonale pe o dreaptă

1. $F' = \{A, B\}$. **2.** $AB = 12$ cm sau $AB = 8$ cm. **3.** a) O; B; A; b) A; segmentul AO; c) segmentul AB. **4.** a) segmentul CD; b) segmentul AB; c) punctul D; d) punctul A; e) segmentul AD. **5.** 3 cm. **6.** $M(2, 0)$; $N(0, -3)$. **7.** 3, respectiv 2.

VII.2. Teorema înălțimii

1. a) $AD = 6$ cm; $BC = 13$ cm; b) $BC = 25$ cm; c) $AD = 12$ m, $BD = 9$ m. **2.** a) $AD = 2{,}4$ m; $BC = 8$ m; b) $AD = 10{,}5$ cm, $DC = 31{,}5$ cm; c) $BD = 6{,}75$ cm. **3.** a) $AD = 6$ cm; b) $CD = 2$ cm; c) $BC = 12$ cm. **4.** 30 m. **5.** 150 cm². **6.** $AD = \sqrt{440}$ m $< \sqrt{441}$ m $= 21$ m. **7.** 12 cm; 156 cm². **8.** $AE = 12$ cm, $EF = 27$ cm. **9.** Fie $AE \perp DC$ și $BF \perp DC$, $E, F \in CD$; atunci $AE = FC = 6$ cm, $BF = 12$ cm, $\mathcal{A}_{ABCD} = 288$ cm². **10.** $\mathcal{A}_{ABC} = 2\sqrt{3}$ cm² și $3{,}4 < 2\sqrt{3} < 3{,}5 \Leftrightarrow 1{,}7 < \sqrt{3} < 1{,}75$, adevărat. **11.** a) $AC \parallel DE$ și $DC \parallel AE$; b) $DE \parallel AC$, $AC \perp BD \Rightarrow DE \perp BD$; c) $AD^2 = AE \cdot AB \Rightarrow AD = 6$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{(AB+CD)\cdot AD}{2} = 39$ cm². **12.** AD este înălțime în ΔABC, D este între B și C, iar $AD^2 = BD \cdot DC$, deci ΔABC este dreptunghic în A. **13.** Dacă AB și AC ar fi perpendiculare, atunci ar trebui ca $AD^2 = BD \cdot CD$, fals. **14.** $\sphericalangle ABC > \sphericalangle ADC = 90°$, deci triunghiul ABC nu este dreptunghic. Nu putem aplica reciproca teoremei înălțimii, deoarece D nu este între B și C.

VII.3. Teorema catetei

1. a) $AB = 15$ cm, $AC = 20$ cm; b) $CD = 9$ cm, $AC = 6\sqrt{3}$ cm; c) $AB = 3\sqrt{5}$ cm. **2.** a) $AB = 21$ cm, $AC = 28$ cm; b) $DC = 19{,}2$ cm, $AC = 24$ cm; c) $BD = \frac{27}{200}$ m, $AB = \frac{9}{40}$ m. **3.** a) $AB = 6\sqrt{2}$ cm; $AC = 3\sqrt{10}$ cm; b) $CD = 2$ cm, $AC = 4$ cm; c) $BD = 4\sqrt{3}$ cm, $AB = 2\sqrt{15}$ cm. **4.** $BD = 24$ cm, $AC = 6\sqrt{5}$ cm; $AB = 12\sqrt{5}$ cm. **5.** $BC = 36$ cm, $AD = 8\sqrt{2}$ cm, $AC = 24\sqrt{2}$ cm. **6.** $CD = 8$ cm, $AC = 4\sqrt{13}$ cm, $AB = 6\sqrt{13}$ cm. **7.** $10\sqrt{13}$ cm. **8.** Dacă $DF \perp AB$, $CE \perp AB$, $E, F \in AB$, atunci $AF = EB = 4$ cm, $CE = 6$ cm, $BC = 2\sqrt{13}$ cm. $\mathcal{P}_{ABCD} = (4\sqrt{13} + 18)$ cm; $\mathcal{A}_{ABCD} = 54$ cm². **9.** $AE = 2$ cm, $BE = 1$ cm, $BD = \sqrt{3}$ cm, $CD = 2\sqrt{3}$ cm, $AC = 3\sqrt{2}$ cm. **10.** $BC = 20$ cm. **11.** $BD = 2$ cm, $DC = 3$ cm, $AD = \sqrt{6}$ cm, $AC = \sqrt{15}$ cm. **12.** $AC = 2 \cdot AO = 40$ cm, $BD = 2 \cdot OB = 30$ cm. **13.** $BD = 16$ cm, $CD = 9$ cm, $AD = 12$ cm, $DE = \frac{27}{4}$ cm, $CE = \frac{45}{4}$ cm. **14.** Din $AB^2 = BD \cdot BC$ rezultă $\sphericalangle BAC = 90°$; $AC = 3\sqrt{5}$ cm. **15.** Ducem $AD \perp BC$, D mijlocul lui BC. Din $AC^2 = CD \cdot CE$ rezul-

Editura Paralela 45

CUPRINS

CUVÂNT-ÎNAINTE 5

PROBLEME RECAPITULATIVE CLASA A VI-A
ARITMETICĂ 7
GEOMETRIE 11

TESTE INIȚIALE 15

ALGEBRĂ
CAPITOLUL I. MULȚIMEA NUMERELOR REALE
I.1. Rădăcina pătrată a unui număr natural pătrat perfect. Calculul rădăcinii pătrate a unui număr natural pătrat perfect 19
I.2. Rădăcina pătrată a pătratului unui număr rațional 23
I.3. Numere iraționale, exemple, estimări. Mulțimea numerelor reale. Incluziunile $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ 25
I.4. Compararea și ordonarea numerelor reale. Reprezentarea numerelor reale pe axă prin aproximări 31
I.5. Modulul unui număr real 33
I.6. Reguli de calcul cu radicali. Scoaterea și introducerea factorilor sub radical 35
I.7. Adunarea și scăderea numerelor reale 38
I.8. Înmulțirea și împărțirea numerelor reale. Raționalizarea numitorilor de forma $a\sqrt{b}$ 41
I.9. Puterea cu exponent întreg a unui număr real 45
I.10. Ordinea efectuării operațiilor cu numere reale 47
I.11. Media aritmetică ponderată a n numere reale, $n \geq 2$ 54
I.12. Media geometrică a două numere reale pozitive 55
I.13. Ecuații de forma $x^2 = a$, unde $a \in \mathbb{R}$ 58
Recapitulare și sistematizare prin teste 60

CAPITOLUL II. ECUAȚII ȘI SISTEME DE ECUAȚII LINIARE
II.1. Transformarea unei egalități într-o egalitate echivalentă. Identități 62
II.2. Ecuații de forma $ax + b = 0$, $a, b \in \mathbb{R}$. Mulțimea soluțiilor unei ecuații. Ecuații echivalente 64
II.3. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 68
II.4. Sisteme de două ecuații liniare cu două necunoscute 72
II.5. Probleme care se rezolvă cu ajutorul sistemelor de ecuații liniare 76
Recapitulare și sistematizare prin teste 79

CAPITOLUL III. ELEMENTE DE ORGANIZARE A DATELOR
III.1. Date statistice – recapitulare și completări. Poligonul frecvențelor 81
III.2. Sistem de axe ortogonale în plan. Reprezentarea punctelor într-un sistem de axe ortogonale 87
III.3. Distanța dintre două puncte din plan 91

Editura Paralela 45

III.4. Produsul cartezian a două mulțimi nevide. Reprezentarea într-un sistem de axe ortogonale a unor perechi de numere reale 95
III.5. Reprezentarea și interpretarea unor dependențe funcționale prin tabele, diagrame și grafice 99
Recapitulare și sistematizare prin teste 104

GEOMETRIE

CAPITOLUL IV. PATRULATERUL

IV.1. Patrulaterul convex 107
IV.2. Paralelogramul 110
IV.3. Aplicații ale paralelogramului în geometria triunghiului: linia mijlocie în triunghi, centrul de greutate al unui triunghi 114
IV.4. Dreptunghiul 117
IV.5. Rombul 120
IV.6. Pătratul 123
IV.7. Trapezul. Linia mijlocie în trapez 126
IV.8. Trapezul isoscel 130
IV.9. Aria triunghiului 132
IV.10. Ariile patrulaterelor 136
Recapitulare și sistematizare prin teste 144

CAPITOLUL V. CERCUL

V.1. Probleme recapitulative din materia clasei a VI-a 146
V.2. Coarde și arce în cerc. Proprietăți 149
V.3. Unghi înscris în cerc 152
V.4. Tangente dintr-un punct exterior la un cerc 156
V.5. Poligoane regulate înscrise într-un cerc. Definiție, desen 159
V.6. Lungimea cercului și aria discului 161
Recapitulare și sistematizare prin teste 166

CAPITOLUL VI. ASEMĂNAREA TRIUNGHIURILOR

VI.1. Segmente proporționale. Teorema paralelelor echidistante 168
VI.2. Teorema lui Thales. Împărțirea unui segment în părți proporționale cu numere (segmente) date 173
VI.3. Reciproca teoremei lui Thales 179
VI.4. Triunghiuri asemenea. Teorema fundamentală a asemănării 183
VI.5. Criterii de asemănare a triunghiurilor 186
VI.6. Aplicații. Raportul ariilor a două triunghiuri asemenea. Aproximarea în situații practice a distanțelor folosind asemănarea 191
Recapitulare și sistematizare prin teste 197

CAPITOLUL VII. RELAȚII METRICE ÎN TRIUNGHIUL DREPTUNGHIC

VII.1. Proiecții ortogonale pe o dreaptă 199
VII.2. Teorema înălțimii 200
VII.3. Teorema catetei 202
VII.4. Teorema lui Pitagora. Reciproca teoremei lui Pitagora 205

Editura Paralela 45

VII.5. Noțiuni de trigonometrie în triunghiul dreptunghic: sinusul, cosinusul, tangenta și cotangenta unui unghi ascuțit 208
VII.6. Rezolvarea triunghiului dreptunghic 211
VII.7. Calculul elementelor (latură, apotemă, arie, perimetru) în triunghiul echilateral, în pătrat și în hexagonul regulat 215
Recapitulare și sistematizare prin teste 218

PROBLEME RECAPITULATIVE
ALGEBRĂ 220
GEOMETRIE 225

INDICAȚII ȘI RĂSPUNSURI 231

Editura Paralela 45