CODRUȚ-SORIN ZMICALĂ

MATEMATICĂ BACALAUREAT – FILIERA TEHNOLOGICĂ

CALE SIGURĂ SPRE NOTA 10

TESTE, BAREME ȘI PROBLEME REZOLVATE

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2+16$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=x(x-8)$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-\frac{x^3}{3}}{2f'(x)}$.

5p **c)** Demonstrați că $-208\le 3f(x)\le 48$, pentru orice $x\in[0,8]$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+1)^2+2x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2\left(f(x)-2x\right)dx=\frac{19}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_1^{\sqrt{2}}\frac{1}{f(x)-2x}dx$.

5p **c)** Determinați numărul natural t cu proprietatea că $\int_0^3\frac{f(x)}{x+2}dx=\frac{t}{2}-3\ln\frac{5}{2}$.

✍ NOTIȚE

TESTUL 6

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătaţi că $\left(2\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(2\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)=10$.
5p	**2.** Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-1$. Determinaţi numărul real a pentru care $f(a)+f(a+1)=4$.
5p	**3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $10^x\cdot 10^{x-1}=100$.
5p	**4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr n din mulţimea numerelor naturale de o cifră, acesta să verifice inegalitatea $n^2<20$.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(4,-2)$, $C(0,-2)$ și $D(6,-2)$. Arătaţi că segmentele AB și CD au același mijloc.
5p	**6.** Se consideră triunghiul DEF, dreptunghic în D, cu $DE=3$ și $DF=4$. Arătaţi că $\sin E+\sin F=1{,}4$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1-x & x\\ -2x & 1+x\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.
5p	**a)** Arătaţi că $\det\left(A(1)\right)=\det\left(A(-1)\right)$.
5p	**b)** Determinaţi numărul natural a pentru care $A(1)\cdot A(-1)=aI_2$.
5p	**c)** Aflaţi numerele reale x pentru care $\left(x-\sqrt{2}\right)\left(x+\sqrt{2}\right)=\det\left(A(x)+A(-x)\right)$.
	2. Se consideră polinomul $f=X^3-mX^2+X+6$, unde m este număr real, iar x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.
5p	**a)** Pentru $m=1$, arătaţi că $f(1)=7$.
5p	**b)** Determinaţi numărul real m pentru care $x_1(1+x_2)+x_2(1+x_3)+x_3(1+x_1)=x_1x_2x_3$.
5p	**c)** Dacă f este divizibil cu polinomul $X-2$, calculaţi $x_1^4+x_2^4+x_3^4$.

TESTUL 18: BAREM DE EVALUARE ȘI NOTARE

- Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$2\left(3+\sqrt{72}\right)-\sqrt{288}+\sqrt{25}=2\left(3+6\sqrt{2}\right)-12\sqrt{2}+5=$	**3p**
	$=6+12\sqrt{2}-12\sqrt{2}+5=11$	**2p**
2.	$f(x)=g(x)\Leftrightarrow 3x+7=1-3x\Leftrightarrow x=-1$	**3p**
	Coordonatele punctului de intersecţie sunt $x=-1$ și $y=4$	**2p**
3.	$x+3=4^{\frac{1}{2}}$	**2p**
	$x+3=2\Rightarrow x=-1$, care convine	**3p**
4.	Preţul obiectului după scumpirea cu 20% este $1000+\frac{20}{100}\cdot 1000=1200$ de lei	**2p**
	Preţul obiectului după ieftinirea cu 30% este $1200-\frac{30}{100}\cdot 1200=1200-360=840$ de lei	**3p**
5.	$m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=-1$ și $m_{AB}=\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{a+2}{-5}$	**3p**
	Punctele A, B și C sunt coliniare $\Leftrightarrow$ $m_{AC}=m_{AB}$ $\Leftrightarrow$ $a=3$	**2p**
6.	Observăm că $x+1>x-1>x-3$ și, cum triunghiul este dreptunghic $\Rightarrow (x+1)^2=(x-1)^2+(x-3)^2\Leftrightarrow x^2-10x+9=0$	**3p**
	Cum x este număr real, strict mai mare decât 3, obţinem $x=9$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

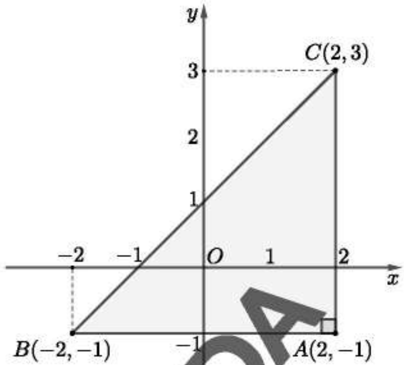
1.a)	$B(0)=A-I_2=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \det\left(B(0)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=2\cdot 0-1\cdot 3=$	**3p**
	$=0-3=-3$	**2p**

	$=\begin{pmatrix}2\cdot 2+1\cdot 0 & 2\cdot 0+1\cdot 2\\ 0\cdot 2+2\cdot 0 & 0\cdot 0+2\cdot 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 2\\ 0 & 4\end{pmatrix}=2X(0)$	**3p**
b)	$\det\left(X(a)\right)=\begin{vmatrix}2 & 1-a\\ 0 & 2\end{vmatrix}=4$, pentru orice număr întreg a	**2p**
	$4=a^2$, de unde obţinem $a_1=2$ şi $a_2=-2$	**3p**
c)	$X(a)\cdot X(a+1)=\begin{pmatrix}4 & 2-4a\\ 0 & 4\end{pmatrix}$ şi $2X\left(a^2\right)=\begin{pmatrix}4 & 2-2a^2\\ 0 & 4\end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**2p**
	$2-4a=2-2a^2$, de unde obţinem $a=0$ şi $a=2$	**3p**
2.a)	$(-2)*(-1)=(-2)\cdot(-1)-2=0$ şi $(-2)*1=-2\cdot 1-2=-4$	**4p**
	$(-2)*(-1)+(-2)*1=-4$	**1p**
b)	$x*(10x)=10x^2-2$, pentru orice număr real x	**2p**
	$10x^2-x-2=0$, de unde obţinem $x=-\frac{2}{5}$ sau $x=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	$m*n=mn-2$, pentru orice numere naturale nenule m şi n	**1p**
	$mn-2<2 \Leftrightarrow mn<4$ şi, cum m şi n sunt numere naturale nenule, obţinem $(m,n)\in\{(1,2);(2,1);(1,3);(3,1);(2,2)\}$	**4p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2-\frac{1}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x-1}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)+\ln x-x^2}{2x-4}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x-x^2}{2x-4}=$	**2p**
	$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x(x-2)}{2(x-2)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{-x}{2}=-1$	**3p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**

Metoda 2: Determinăm dintre punctele A și B (lungimea segmentului AB):



$$AB^2=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2=\sqrt{(-2-2)^2+(-1+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$AB^2=\sqrt{(-4)^2+0^2} \Leftrightarrow AB=\sqrt{16} \Leftrightarrow$$

$AB=4$.

Calculăm distanța dintre punctele A și C (lungimea segmentului AC):

$$AC=\sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} \Leftrightarrow$$

$$AC=\sqrt{(2-2)^2+(3+1)^2} \Leftrightarrow$$

$$AC=\sqrt{0^2+4^2} \Leftrightarrow AC=\sqrt{16} \Leftrightarrow AC=4.$$

Determinăm distanța dintre punctele B și C (lungimea segmentului BC):

$$BC=\sqrt{(x_C-x_B)^2+(y_C-y_B)^2}=\sqrt{(2+2)^2+(3+1)^2}=\sqrt{4^2+4^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}.$$

Potrivit reciprocei teoremei lui Pitagora, dacă un triunghi are pătratul lungimii unei laturi egal cu suma pătratelor lungimilor celorlalte două laturi, atunci triunghiul este dreptunghic.

Observăm că $\left(4\sqrt{2}\right)^2=32=4^2+4^2$, deci $BC^2=AB^2+AC^2 \Rightarrow \Delta ABC$ este dreptunghic în A.

Ne amintim că $\mathcal{A}_{\Delta\,\text{dreptunghic}}=\dfrac{c_1\cdot c_2}{2}$, unde c_1 și c_2 sunt cele două catete. Astfel,

$$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{AB\cdot AC}{2}=\frac{4\cdot 4}{2}=8.$$

15. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,-2)$, $B(-3,a)$ și $C(1,-1)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că punctele A, B și C sunt coliniare.

Problema 5, subiectul I, testul 18

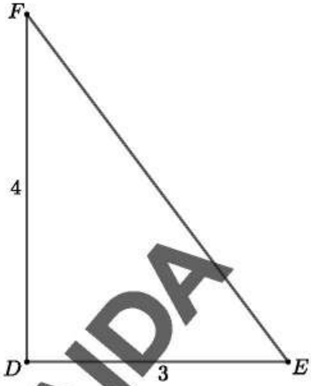
Rezolvare:

Metoda 1: Trei puncte A, B și C sunt coliniare (se află pe aceeași dreaptă) dacă panta dreptei AB este egală cu panta dreptei AC (sau BC).

Rezolvare:

Dacă x este un unghi ascuțit într-un triunghi dreptunghic, atunci

$$\sin x = \frac{\text{cateta opusă unghiului } x}{\text{ipotenuză}}.$$



Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔDEF:

$EF^2 = DF^2 + DE^2 \Rightarrow EF^2 = 4^2 + 3^2 \Rightarrow$

$EF^2 = 25 \Rightarrow EF = \sqrt{25} \Rightarrow EF = 5$.

Atunci $\sin E = \frac{DF}{EF} = \frac{4}{5}$ și $\sin F = \frac{DE}{EF} = \frac{3}{5}$.

Prin urmare, $\sin E + \sin F = \frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{7}{5} = 1,4$.

17. Se consideră ΔABC, dreptungic în A, cu $AC = 6$ și $BC = 10$. Știind că punctele M și N sunt mijloacele segmentelor AB și AC, arătați că $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 4\mathcal{A}_{\Delta AMN}$.

Problema 6, subiectul I, testul 23

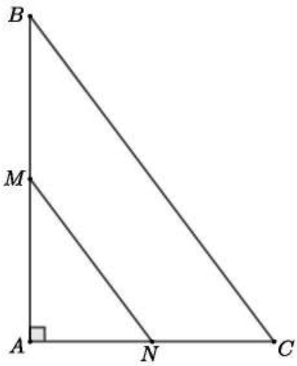
Rezolvare:

Aplicăm teorema lui Pitagora în ΔABC:

$AB^2 + AC^2 = BC^2 \Rightarrow AB^2 + 6^2 = 10^2 \Rightarrow$

$AB^2 + 36 = 100 \Rightarrow AB^2 = 100 - 36 \Rightarrow$

$AB^2 = 64 \Rightarrow AB = \sqrt{64} = 8$.



Cum M - mijlocul segmentului AB rezultă

$AM = \frac{AB}{2} = 4$.

Cum N - mijlocul segmentului AC rezultă

$AN = \frac{AC}{2} = 3$.

$$\mathcal{A}_{\Delta AMN} = \frac{AM \cdot AN}{2} = \frac{4 \cdot 3}{2} = 6 \text{ și } \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24.$$

În consecință, $\mathcal{A}_{\Delta ABC} = 4\mathcal{A}_{\Delta AMN}$.

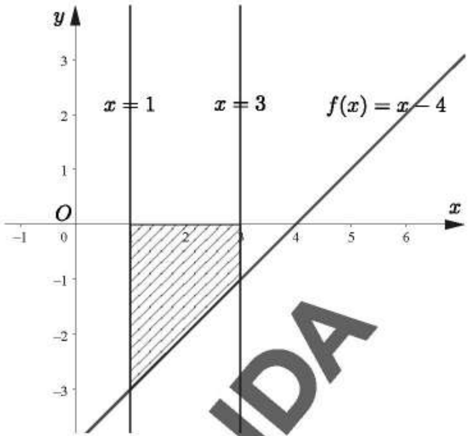
18. Arătați că $\sin 2x = \frac{24}{25}$, știind că $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ și $\sin x = \frac{4}{5}$.

Problema 6, subiectul I, testul 8

Folosim exprimarea ariei cerute cu ajutorul integralei definite:

$$\mathcal{A}=\int_1^3 |g(x)|\,dx=\int_1^3 |x-4|\,dx .$$

Cum $g(x)<0$, pentru orice $x\in[1,3]$, $|x-4|=-(x-4)=4-x$, obținem:



$$\mathcal{A}=\int_1^3 (4-x)\,dx=\left(4x-\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_1^3=$$

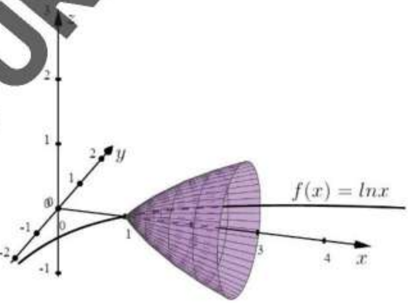
$$=\left(4\cdot 3-\frac{3^2}{2}\right)-\left(4\cdot 1-\frac{1^2}{2}\right)=4.$$

c) Aflăm funcția h, înlocuind $f(x)$:

$$h(x)=\frac{1}{3}\left(f(x)-x+4\right)=\frac{1}{3}(3\ln x+x-4-x+4)=\frac{1}{3}\cdot 3\ln x=\ln x,\ x\in[1,e].$$

Volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției h este:

$$\mathcal{V}=\pi\int_1^e h^2(x)\,dx=\pi\int_1^e \ln^2 x\,dx.$$



Pentru rezolvarea integralei precedente, folosim metoda integrării prin părți, observând mai întâi că $\ln^2 x=x'\cdot\ln x$.

Astfel, $\mathcal{V}=\pi\int_1^e x'\cdot\ln^2 x\,dx=$

$$=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot\left(\ln^2 x\right)'dx\right)=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-\int_1^e x\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e \ln x\,dx\right)=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2\int_1^e x'\cdot\ln x\,dx\right)=$$

$$=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2x\ln x\Big|_1^e+2\int_1^e x\cdot(\ln x)'\,dx\right)=\pi\left(x\ln^2 x\Big|_1^e-2x\ln x\Big|_1^e+2x\Big|_1^e\right)=$$

$$=\pi(e-2e+2e-2)=\pi(e-2).$$