Cuprins

I Mulțimi

I.1 Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi 5

I.2 Mulțimi finite. Mulțimi infinite 9

I.3 Operații cu mulțimi 14

II Divizibilitatea numerelor naturale

II.1 Criterii de divizibilitate. Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime 19

II.2 C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. 25

III Rapoarte și proporții. Procente

III.1 Rapoarte 33

III.2 Procente 42

III.3 Proporții 50

III.4 Mărimi direct proporționale. Mărimi invers proporționale 58

IV Mulțimea numerelor întregi

IV.1 Numere întregi. Modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi 72

IV.2 Operații cu numere întregi 80

IV.3 Ecuații și inecuații în mulțimea numerelor întregi 97

IV.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor și al inecuațiilor 104

V Mulțimea numerelor raționale

V.1 Numere raționale. Modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale 109

V.2 Operații cu numere raționale 118

V.3 Ecuații în mulțimea numerelor raționale 134

V.4 Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor 140

VI Noțiuni geometrice fundamentale

VI.1 Unghiuri adiacente. Unghiuri suplementare, unghiuri complementare. Unghiuri opuse la vârf. Unghiuri în jurul unui punct 144

VI.2 Paralelism și perpendicularitate 155

VI.3 Cercul 162

VII Triunghiul 166

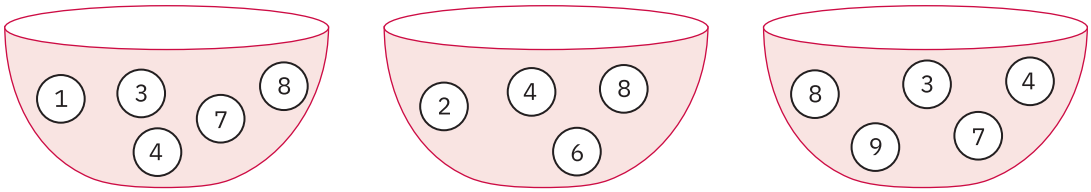
VIII Proprietățile triunghiurilor 180

IX Teste pentru începutul clasei a VII-a

Testul 1 188
Testul 2 191
Testul 3 193
Testul 4 195
Testul 5 197

I.1. Relația dintre un element și o mulțime. Relații între mulțimi

1 În trei coșuri C_1, C_2 și C_3 avem bile numerotate ca în figura următoare:



Coș nr. 1 Coș nr. 2 Coș nr. 3

a Căror coșuri le aparține bila cu numărul 2?

b Căror coșuri le aparține bila cu numărul 3?

c Căror coșuri le aparține bila cu numărul 6?

2 Scrieți toate numerele naturale care:

a sunt cel mult egale cu 6

b sunt cel puțin egale cu 23 și cel mult egale cu 31

c au două cifre, iar suma cifrelor este egală cu 5.

3 Scrieți:

a mulțimea resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 7;

b mulțimea resturilor posibile ale împărțirii unui număr natural la 3;

c mulțimea resturilor posibile împărțirii unui număr natural la 18;

d mulțimea cifrelor din sistemul cu baza 2;

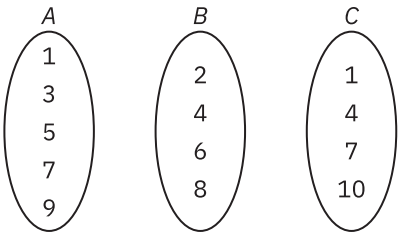
e mulțimea cifrelor din sistemul zecimal;

f mulțimile literelor care formează fiecare dintre următoarele cuvinte: „matematică“; „jucărie“; „electricitate“; „marmeladă“;

g mulțimea cifrelor din care sunt formate numerele: 23 561; 134 364; 50 230 203.

4 Se dau mulțimile: $A = \{2; 3; 4; 5\}$; $B = \{1; 3; 5\}$; $C = \{3; 4; 5; 6; 7\}$.
Pentru fiecare dintre elementele: 1; 2; 5; 6; 7, scrieți cărei mulțimi îi aparțin și căreia nu îi aparțin.
Exemplu: $1 \in B$; $1 \notin A$; $1 \notin C$.

5 Urmărind diagramele de mai jos, precizați elementele mulțimilor A, B și C:



6 Enumerați elementele fiecărei mulțimi:

a $A = \{x \mid x$ este număr natural, $x \leq 8\}$;

b $B = \{x \mid x$ este număr natural, $2 \leq x \leq 10\}$;

c $C = \{x \mid x$ este număr natural, $1 < x \leq 6\}$;

d $D = \{x \mid x$ este număr natural nenul, $x \leq 2020\}$;

e $E = \{x \mid x$ este număr natural par, $x \leq 33\}$;

f $F = \{x \mid x$ este număr natural, $203 \leq x < 204\}$;

g $G = \{x \mid x$ este număr natural, $44 < x < 45\}$.

7 Scrieți următoarele mulțimi, punând în evidență proprietățile caracteristice ale elementelor lor:

a $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6\}$;

b $B = \{0; 2; 4; 6; 8\}$;

c $C = \{1; 3; 5; 7; 9\}$;

d $D = \{1; 2; 4; 8; 16; 32\}$;

e $E = \{5; 10; 15; 20; 25; 30\}$.

8 Fie $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 \leq x < 2\}$. Scrieți elementele următoarelor mulțimi:

$B = \{x \in A \mid x < 0\}$;

$C = \{x \in A \mid x \geq 0\}$;

$D = \{x \in A \mid x$ este număr par$\}$;

$E = \{x \in A \mid x = a + b,\ a, b \in A\}$;

$F = \{x \in A \mid x > 1\}$.

I.2. Mulțimi finite. Mulțimi infinite

1 Scrieți, dacă există, câte cinci elemente ale mulțimilor:

a $\mathbb{N}$; **b** $\mathbb{Z}$; **c** $\mathbb{Z}_-$; **d** $\mathbb{Z}_+$; **e** $\mathbb{N} \setminus \mathbb{Z}$.

Rezolvare:

2 Enumerați elementele mulțimilor:

a $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 12 \vdots x\}$;

$A = \{....., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ..., ...\}$

b $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 18\}$;

c $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x - 1| < 3\}$;

$|x - 1| < 3 \Leftrightarrow -3 < x - 1 < 3 \Leftrightarrow$

d $D = \{x \in \mathbb{Z} \mid x \vdots 2 \text{ și } -18 < x \leq 2\}$;

e $E = \{x \in Z \mid -3 \mid x \text{ și } |2x - 1| < 19\}$;

f $F = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{13}{x+2} \in \mathbb{N} \right\}$;

g $G = \left\{ x \in \mathbb{Z} \,\middle|\, \frac{2x-3}{x+5} \in \mathbb{Z} \right\}$;

h $H = \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 + x = 2 \cdot (1 + 2 + 3 + \ldots + 2021)\}$.

3 Aflați cardinalul următoarelor mulțimi:

a $A = \{-1; 0; 1; 2; 3; 4\}$

b $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n < 21\}$

c $C = \{n \in \mathbb{N} \mid n \mid 24\}$

d $D = \{n \in \mathbb{N} \mid n = 2k, k \in \mathbb{N}, n < 15\}$

e $E = \{n \in \mathbb{N} \mid (3 \cdot 4)2 + 3n \leq 291\}$

4 În tabelul de mai jos se găsesc informații privind elevii clasei a VI-a A dintr-o școală, care au participat în acest an școlar la olimpiade:

Numele elevului	Vârsta	Înălțimea	Culoarea părului	Olimpiada la care a participat
Raluca	12 ani	1,48 m	Brunetă	Matematică, Fizică
Matei	12 ani	1,49 m	Blond	Fizică, Limba engleză
Tudor	12 ani	1,50 m	Șaten	Limba română, Limba engleză
Emma	11 ani	1,48 m	Șatenă	Matematică, Biologie
Victor	12 ani	1,48 m	Blond	Fizică, Biologie, Geografie
Luca	11 ani	1,40 m	Brunet	Limba română, Religie, Istorie
Rita	12 ani	1,48 m	Blondă	Limba română

Determinați elementele următoarelor mulțimi:
A = Mulțimea tuturor elevilor
B = Mulțimea fetelor
C = Mulțimea băieților
D = Mulțimea elevilor care au 12 ani
E = Mulțimea elevilor care au participat la două olimpiade
F = Mulțimea elevilor care au înălțimea de 1,48 m
G = Mulțimea elevilor blonzi
H = Mulțimea elevilor care au participat la cel puțin două olimpiade

Rezolvare:

5 Fie mulțimea $A = \left\{2; -4; \frac{15}{5}; \frac{1}{3}; -\frac{11}{11}; +7; \frac{2}{4}; +\frac{21}{3}\right\}$.

Scrieți 3 submulțimi ale mulțimii A ale căror elemente sunt numere întregi.

Rezolvare:

6 Se dau mulțimile: $A = \{n \in \mathbb{N}^* \mid n \leq 3\}$ și $B = \{n \in \mathbb{N}^* \mid 2^n \leq 8\}$.
Stabiliți dacă mulțimile A și B sunt egale.

Rezolvare:

7 Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -3 < x + 5 \leq 3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid -6 \leq x < -2\}$.
Determinați valoarea de adevăr a propozițiilor:

a $-5 \in A$; **b** $A \subset B$; **c** $\varnothing \subset B$; **d** $\{-1; 0; 1\} \subset A$.

Rezolvare:

8 Fie mulțimile: $A = \{-2; -1; 3; 5; 8\}$; $B = \{-1; 3; 5\}$; $C = \{-2\}$; $D = \{3; 5; 8\}$; $E = \{-2\}$.
Completați spațiile punctate cu unul dintre simbolurile: „$\subset$“; „$\supset$“; „$\not\subset$“.

a A.....B; **b** B.....A; **c** C.....E; **d** B.....D.

9 Aflați $x \in \mathbb{N}$ știind că $\{2; 3; x; 9\} = \{2; 3; 7; 9\}$.

Rezolvare:

10 Determinați valorile lui x, pentru care mulțimea $\{-2; -1; x\}$ este o submulțime a mulțimii $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$.

Rezolvare:

11 Scrieți toate submulțimile mulțimii $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq x \leq 4\}$.

Rezolvare:

12 Arătați că $A \subset B$, unde:

a $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 10 \le x < 15\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \le x \le 14\}$;

Rezolvare:

b $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x$ divizor propriu al lui 18 și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 54 \vdots x\}$;

Rezolvare:

c $A = \{2^0; 2^1; 2^2; 2^3\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 8\}$;

Rezolvare:

d $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x + 3| < 5\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 7\}$;

Rezolvare:

e $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 4x + 11 > 67\}$ și $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 7x - 5 \ge 72\}$;

Rezolvare:

f $A = \{x \in \mathbb{N} \mid (x^2 - 3) \mid 22\}$ și $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \le 5\}$.

Rezolvare:

13 Aflați x astfel încât $A = B$, dacă:

a $A = \{2; 3; 4; 5\}$ și $B = \{x; 5; 3; 4\}$;

Rezolvare:

b $A = \{x + 1; 3x - 2\}$ și $B = \{8; 19\}$;

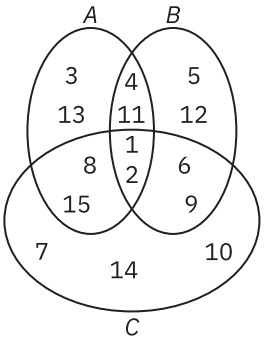
Rezolvare:

c $A = \{3^x; 2^4; 4^3; 7^2\}$ și $B = \{16; 27; 49; 64\}$.

Rezolvare:

I.3. Operații cu mulțimi

1 Fie mulțimile A, B, C, reprezentate prin diagrama Venn-Euler din figura alăturată. Scrieți elementele mulțimilor: A, B, C, $A \cup B$; $A \cap B$; $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \cup B \cup C$; $A \cap B \cap C$.



Rezolvare:

2 Fie mulțimile $A = \{1; 2; 3; 5\}$; $B = \{2; 3; 4\}$; $C = \{3; 5; 7\}$; $D = \{6; 8\}$. Determinați elementele următoarelor mulțimi:

a $A \cup B$; $A \cup C$; $A \cup D$; $B \cup C$; $B \cup A$; $D \cup C$; $(A \cup B) \cup C$; $(A \cup B) \cup (A \cup C)$; $B \cup C \cup D$;

Rezolvare:

b $A \cap B$; $A \cap C$; $A \cup D$; $B \cap C$; $(A \cup B) \cap C$; $(A \cap D) \cup B$; $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; $(A \cap B) \cap (A \cap C)$;

Rezolvare:

c $A \setminus B$; $B \setminus A$; $A \setminus C$; $C \setminus A$; $C \setminus B$; $A \setminus D$; $(A \setminus B) \cap (C \setminus B)$.

Rezolvare:

3 Fie mulțimile: $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 8\}$; $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \vdots 3$ și $x \leq 24\}$; $C = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (x - 1) \vdots 4$ și $x < 27\}$. Determinați elementele mulțimilor:

a $A \cup B$; **b** $B \cup C$; **c** $A \cup C$;

d $A \cup B \cup C$; **e** $A \cap B$; **f** $A \cap C$;

g $B \cap C$; **h** $A \cap B \cap C$; **i** $A \cup (B \cap C)$;

j $(A \cup B) \cap C$; **k** $(A \cap B) \cup (B \cap C)$; **l** $A \cup B \cap \varnothing$.

Rezolvare:

4 Fie mulțimea $A = \{-1; a; 3; 5\}$. Determinați valoarea lui a știind că $\{-2; -1; 3; 4; 5\} \cup A = \{-2; -1; 3; 4; 5; 6\}$.

Rezolvare:

5 Fie mulțimea $B = \{0; x; 4; 6\}$. Determinați valoarea lui x știind că $B \cap \{1; 2; 3; 4\} = \{2; 4\}$.

Rezolvare:

6 Fie mulțimea $A = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$. Determinați mulțimea B, știind că $A \cap B = \varnothing$ și $A \cup B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5; 7; 8\}$.

Rezolvare:

7 Fie mulțimea $A = \{5; 6; 7\}$. Determinați mulțimea B știind că $A \cup B = \{1; 3; 5; 6; 7\}$ și B are trei elemente.

Rezolvare:

8 Fie mulțimea $A = \{1; 3; 5; 7; 9\}$. Determinați mulțimea B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 9\}$; **b** $A \cap B = \{5; 7\}$.

Rezolvare:

9 Determinați mulțimile A și B știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $A \cup B = \{a; b; c; d\}$; **b** $b \notin B$; **c** $A \cap B = \{c; d\}$.

Rezolvare:

10 Să se determine mulțimile M și N știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $M \cup N = \{-3; -1; 1; 3; 5; 7\}$; **b** $M \setminus N = \{1; 5\}$; **c** $N \setminus M = \{-3; -1\}$.

Rezolvare:

11 Să se determine mulțimile M și N știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a $M \cup N = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$; **b** $M \setminus N = \{2; 3\}$; **c** mulțimea M are trei elemente.

Rezolvare:

12 Să se determine mulțimile M și N știind că îndeplinesc simultan condițiile:

a $M \cup N = \{2; 4; 6; 8\}$; **b** $8 \in N \setminus M$; **c** $M \cap N = \{2; 4\}$; **d** $M \setminus N = \{6\}$.

Rezolvare: