

# Cuprins

<b>Cuvânt înainte</b>	<b>iv</b>
<b>1 Numere naturale</b>	<b>1</b>
1.1 Scrierea și citirea numerelor naturale . . . . .	1
1.2 Reprezentarea pe axă a numerelor naturale. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximări. Estimări . . . . .	3
<b>2 Operații cu numere naturale</b>	<b>6</b>
2.1 Adunarea și scăderea numerelor naturale. Proprietățile adunării . .	6
2.2 Înmulțirea numerelor naturale. Proprietățile înmulțirii. Factor comun . . . . .	8
2.3 Împărțirea cu rest zero a numerelor naturale . . . . .	10
2.4 Împărțirea cu rest a numerelor naturale . . . . .	11
<b>3 Puteri cu exponent număr natural</b>	<b>13</b>
3.1 Puterea cu exponent natural a unui număr natural. Pătratul unui număr natural . . . . .	13
3.2 Reguli de calcul cu puteri . . . . .	15
3.3 Compararea puterilor . . . . .	16
3.4 Scrierea în baza 10. Scrierea în baza 2 . . . . .	18
<b>4 Ordinea efectuării operațiilor</b>	<b>20</b>
4.1 Ordinea efectuării operațiilor . . . . .	20
4.2 Utilizarea parantezelor rotunde, pătrate, acolade . . . . .	21
<b>5 Metode aritmetice de rezolvare a problemelor</b>	<b>24</b>
5.1 Metoda reducerii la unitate . . . . .	24
5.2 Metoda comparației . . . . .	25
5.3 Metoda figurativă . . . . .	28
5.4 Metoda mersului invers . . . . .	29
5.5 Metoda falsei ipoteze . . . . .	31
<b>6 Divizibilitatea numerelor naturale</b>	<b>33</b>
6.1 Divizor. Multiplu. Divizori comuni, multipli comuni . . . . .	33
6.2 Criteriul de divizibilitate cu 2. Criteriul de divizibilitate cu 5. Criteriul de divizibilitate cu $10^n$ . . . . .	35
6.3 Criteriul de divizibilitate cu 3. Criteriul de divizibilitate cu 9 . . .	37
6.4 Numere prime. Numere compuse . . . . .	38

<b>7</b>	<b>Fracții ordinare</b>	<b>40</b>
7.1	Fracții ordinare. Frații subunitare, echinuitare, supraunitare. Procente. Frații echivalente . . . . .	40
7.2	Compararea fracțiilor cu același numitor sau același numărător. Reprezentarea pe axă a numerelor a unei fracții ordinare . . . . .	43
7.3	Introducerea și scoaterea întregilor dintr-o fracție . . . . .	44
7.4	Cel mai mare divizor comun a două numere naturale. Amplificarea și simplificarea fracțiilor. Frații ireductibile . . . . .	46
7.5	Cel mai mic multiplu comun a două numere naturale. Aducerea fracțiilor la un numitor comun . . . . .	48
<b>8</b>	<b>Operații cu fracții ordinare</b>	<b>50</b>
8.1	Adunarea și scăderea fracțiilor ordinare . . . . .	50
8.2	Înmulțirea fracțiilor ordinare. Puteri . . . . .	52
8.3	Împărțirea fracțiilor ordinare . . . . .	54
8.4	Fracții/procente dintr-un număr natural sau dintr-o fracție ordinară . . . . .	57
<b>9</b>	<b>Fracții zecimale</b>	<b>60</b>
9.1	Scrierea fracțiilor ordinare cu numitorul puteri ale lui 10, sub formă de fracții zecimale. Transformarea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule în fracție ordinară . . . . .	60
9.2	Aproximări. Compararea, ordonarea și reprezentarea pe axa numerelor a unor fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule . . . . .	61
<b>10</b>	<b>Operații cu fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule</b>	<b>63</b>
10.1	Adunarea și scăderea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule . . . . .	63
10.2	Înmulțirea fracțiilor zecimale cu un număr finit de zecimale nenule . . . . .	64
10.3	Împărțirea a două numere naturale cu rezultat fracție zecimală. Media aritmetică a două sau a mai multor numere naturale . . . . .	66
10.4	Transformarea unei fracții ordinare în fracție zecimală. Periodicitate . . . . .	67
10.5	Împărțirea unei fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule la un număr natural . . . . .	68
10.6	Împărțirea a două fracții zecimale cu un număr finit de zecimale nenule . . . . .	69
10.7	Transformarea unei fracții zecimale periodice în fracție ordinară . . . . .	70
<b>11</b>	<b>Alte probleme cu fracții zecimale</b>	<b>73</b>
11.1	Număr rațional pozitiv. Ordinea efectuării operațiilor cu numere raționale pozitive . . . . .	73

11.2 Metode aritmetice pentru rezolvarea problemelor cu fracții în care intervin și unități de măsură pentru lungime, arie, volum, capacitate, masă, timp și unități monetare . . . . .	75
11.3 Probleme de organizare a datelor. Frecvența. Date statistice organizate în tabele, grafice cu bare sau linii. Media unui set de date statistice . . . . .	76
<b>12 Elemente de geometrie</b>	<b>78</b>
12.1 Punct, dreaptă, plan, semiplan, semidreaptă, segment . . . . .	78
12.2 Pozițiile relative ale unui punct față de o dreaptă. Puncte coliniare. Pozițiile relative a două drepte: drepte concurente, drepte paralele	79
12.3 Distanța dintre două puncte, lungimea unui segment. Segmente congruente . . . . .	80
12.4 Mijlocul unui segment. Simetrical unui punct față de un punct . . .	82
<b>13 Unghiuri</b>	<b>84</b>
13.1 Unghi: definiție, notații, elemente. Interiorul unui unghi, exteriorul unui unghi . . . . .	84
13.2 Măsură unui unghi, unghiuri congruente. Clasificări de unghiuri. Calcule cu măsuri de unghiuri (1) . . . . .	85
13.3 Măsură unui unghi, unghiuri congruente. Clasificări de unghiuri. Calcule cu măsuri de unghiuri (2) . . . . .	86
13.4 Figuri congruente. Axa de simetrie . . . . .	88
<b>14 Unități de măsură</b>	<b>90</b>
14.1 Unități de măsură pentru lungime, transformări. Perimetre . . . . .	90
14.2 Unități de măsură pentru arie, transformări. Aria pătratului și aria dreptunghiului . . . . .	91
14.3 Unități de măsură pentru volum, transformări. Volumul cubului și volumul paralelipipedului dreptunghic . . . . .	92
<b>15 MODELE DE TEZĂ</b>	<b>94</b>
<b>16 Probleme de performanță școlară</b>	<b>100</b>
16.1 Numere naturale . . . . .	100
16.2 Probleme de aritmetică . . . . .	102
16.3 Divizibilitate . . . . .	105
16.4 Numere raționale . . . . .	105
16.5 Geometrie . . . . .	110
16.6 Diverse . . . . .	112
16.7 Principiul cutiei . . . . .	114
<b>Indicații și răspunsuri</b>	<b>118</b>

# Cuvânt înainte

Prezenta lucrare este o completare a manualului. Deși acesta conține suficiente probleme, am simțit nevoia unei auxiliare care să-i ajute pe elevi să-și consolideze cunoștințele sau să se pregătească pentru concursuri și olimpiade.

Lucrarea este structurată în trei secțiuni: exerciții și probleme pentru lecțiile din manual, modele de teze, probleme de performanță, plus răspunsuri.

În prima parte, pentru fiecare lecție din manual, vă propunem câte 10 probleme cu grad diferit de dificultate: primele patru ușoare, următoarele patru de nivel mediu și ultimele două cu grad sporit de dificultate. Acestea sunt precedate, uneori, de probleme rezolvate din manual, indicându-vă, pentru fiecare problemă, numărul și pagina la care se găsește. Răspunsurile acestor probleme se află la finalul lucrării.

Partea a doua cuprinde câte două modele de lucrări scrise semestriale/teze.

În partea a treia am selectat 140 de probleme care s-au dat de-a lungul timpului fie la Olimpiada de Matematică, fie la Concursul „Gazeta Matematică VitoriOlimpici.ro”. Soluțiile acestor probleme se află pe site-ul:

**[culegere.intuitext.ro/rezultate5](http://culegere.intuitext.ro/rezultate5)**

Vă mulțumim că ați ales această carte și vă dorim spor la lucru!

## Capitolul 1

# Numere naturale

### 1.1 Scrierea și citirea numerelor naturale

#### Probleme rezolvate:

##### Problema 9, pagina 13

Este posibil ca un număr natural scris cu cifre nenule (diferite de zero) să aibă cifra sutelor de miliarde egală cu suma celorlalte cifre? Justifică răspunsul dat.

#### Soluție:

Cifra sutelor de miliarde ocupă poziția a douăzecișisprezece, numărând de la dreapta spre stânga. Dacă toate cifrele numărului sunt nenule, deducem că ele sunt mai mari sau egale cu 1 și atunci, cifra sutelor de miliarde este mai mare sau egală cu 11. Dar cea mai mare valoare a unei cifre este 9. Prin urmare, răspunsul este NU!

##### Problema 18, pagina 14

Câte numere de forma  $\overline{abcd}$  au toate cifrele pare, diferite?

#### Soluție:

Cifrele pare sunt: 0, 2, 4, 6 și 8, adică 5 valori. Cifra  $a$  poate fi 2, 4, 6 sau 8, adică are 4 valori. Cifra  $b$  are tot patru valori posibile, trei valori care rămân de la cifra  $a$  plus valoarea 0. Cifra  $c$  poate avea trei valori; se scad cele două valori pe care le au cifrele  $a$  și  $b$ . Cifra  $d$  poate avea două valori; se scad cele trei valori pe care le au cifrele  $a$ ,  $b$  și  $c$ . În sfârșit, cifra  $e$  are o singură valoare. Atunci, numărul de numere este  $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$ . (Am folosit numărarea prin produs. Pentru amănunte vezi site-ul [www.viitoridimpici.ro](http://www.viitoridimpici.ro))

### Probleme propuse:

1. Scrie cu ajutorul cifrelor numerele naturale întâlnite în textul dat: *Pământul s-a format acum patru miliarde șase sute de milioane de ani. Rocile fierbinți de la suprafață s-au întărit și au format scoarța. Primele fosile datează de acum trei miliarde de ani. Studiarea fosilelor de dinosaur ne arată că aceste animale au apărut pe Pământ acum două sute de milioane de ani.*

2. Tabelul de mai jos prezintă cele șase orașe din România care au o populație numeroasă și care se înscriu în clasamentul celor mai populate orașe din Uniunea Europeană.

Orașul	Numărul de locuitori
București	1 883 425
Cluj-Napoca	324 576
Timișoara	319 279
Iuși	302 142
Constanța	283 872
Craiova	269 506

Scrie cu ajutorul literelor numărul locuitorilor: a) orașului București; b) orașului Iuși; c) orașului Constanța; d) localității în care locuiești.

3. Precizează ce ordin și ce clasă reprezintă pentru fiecare număr cifra subliniată: 1 809; 123 455; 40 101; 1 213 005; 543 100 304.

4. Scrie suma, fără a efectua calculele:

a)  $3 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1\,000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 7 =$

b)  $7 \cdot 100\,000 + 3 \cdot 1\,000 + 6 \cdot 10 + 7 =$

c)  $a \cdot 100 + b \cdot 10 + c =$

d)  $10\,000 \cdot a + 1\,000 \cdot a + 100 \cdot a + 10 \cdot a + a =$

5. Descompune următoarele numere în sumă de produse: 12 356, 234 500 102, 4 000 123, abede f, TTTT.

6. Scrie ca sumă de produse următoarele numere:

a) o mie douăzeci și unu;

b) treizeci de mii șapte sute doi;

c) patru sute cincizeci de mii două sute unu;

d) un milion nouă sute treizeci de mii o sută douăzeci și trei;

e) patruzeci și șapte de milioane șase sute optzeci și cinci de mii treizeci;

f) cinci sute patru milioane două sute șaptezeci și unu de mii o sută treizeci și nouă.

7. Scrie cel mai mic și cel mai mare număr de nouă cifre cu proprietatea că ultima cifră reprezintă:

- suma primelor patru cifre;
- produsul primelor patru cifre;
- suma primelor opt cifre;
- produsul primelor opt cifre.

Ce rezultate obții dacă folosești doar cifre nenule?

8. Numărul de scoici de pe litoralul Mării Negre este de ordinul miliardelor. Știind că acest număr se scrie doar cu cifre impare, iar succesorul răsturnatului său este trei miliarde nouă sute șaptezeci și cinci de milioane cinci sute treizeci și unu de mii o sută douăzeci, care este numărul de scoici?

9. Determină cifrele nenule  $a, b, c, d$ , știind că  $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{bc} + c = 1370$ .

10. Arată că nu există numere naturale de forma  $\overline{abc}$  astfel încât  $\overline{abc} = a \cdot \overline{bc}$ .

## 1.2 Reprezentarea pe axă a numerelor naturale. Compararea și ordonarea numerelor naturale. Aproximări. Estimări

### Probleme propuse:

1. Următorul tabel conține numărul de locuitori al mai multor orașe din România.

Brașov	Cluj-Napoca	Constanța	Craiova	Iasi	Timișoara
253 200	324 576	283 872	289 506	362 142	319 279

a) Ordonează crescător numerele din tabel. Care este cel mai populat oraș dintre cele din tabel?

b) Care orașe ne oferă numere care dau același rezultat la rotunjirea la zece de mii? Dar la sute de mii?

2. Următorul tabel conține numărul de locuitori al mai multor capitale de pe continentul Europa.

Berlin	3 421 829
București	2 192 372
Londra	8 787 892
Madrid	3 141 991
Paris	2 220 445
Roma	2 743 796

- a) Ordonează crescător numerele apărute în tabel.  
 b) Aproximează la sute de mii, la sute de mii și la milioane, atât prin lipsă, cât și prin adăos, toate numerele din tabel.  
 c) Care orașe au, după rotunjirea la milioane a numărului de locuitori, o populație de aproximativ 3 milioane de oameni?

3. Radu dorește să afle care sunt cele mai lungi fluvii din lume. După o scurtă căutare, el găsește următoarele informații:

Amazon (America de Sud)	6 516
Enisei (Asia)	5 550
Huanghe (Asia)	5 464
Mekong (Asia)	4 425
Mississippi (America de Nord)	6 019
Nil (Africa)	6 095
Obi (Asia)	5 570
Parana (America de Sud)	4 500
Yangtze (Asia)	6 380
Zair (Africa)	4 667

Din păcate, el nu are suficiente fonduri decât pentru a vedea cinci dintre aceste fluvii. Pentru a alege cele cinci fluvii, Radu grupează mai întâi fluviile după rotunjirea numerelor din tabel la mii: dacă două fluvii se rotunjesc la aceeași mie, atunci ele fac parte din aceeași grupă. Apoi alege din fiecare grupă cel mai mare număr. În cazul în care a ales prea puține fluvii, el va alege din fluviile rămase în ordine descrescătoare în raport cu lungimea lor (mai întâi pe cel mai lung rămas, apoi pe următorul cel mai mare, ș.a.m.d.). Ce fluvii va alege Radu?

4. Ana vrea să călătorească prin Europa și a găsit următoarele informații legate de suprafața exprimată în  $\text{km}^2$  a anumitor țări:

Franta	643 801
Germania	357 168
Spania	505 992
Ucraina	603 500
Suedia	450 295
Finlanda	338 424
Polonia	312 685
Italia	301 336
Regatul Unit	242 900
Norvegia	323 782

Ana va vizita mai întâi țara cu cea mai mare suprafață, apoi țara cu cea mai mică suprafață a cărei rotunjire la sute de mii este mai mare de  $453\,267\text{ km}^2$ . Ce țări va vizita Ana?



5. Scrie aproximațiile la zeci, sute și mii, atât prin lipsă, cât și prin aducere, ale numerelor 23, 145, 1 296 și 31 120.

6. Câte numere naturale rotunjite la zeci dau rezultatul 100? Dar pentru rezultatul 2300? Rămâne rezultatul valabil pentru orice număr care se împarte exact la 10?

7. Determină numerele naturale pe care dacă le rotunjim la mii obținem 1930000, iar dacă le rotunjim la sute obținem 1930100.

8. Compară numerele: a)  $\overline{82a49}$  și  $\overline{824a9}$ ; b)  $\overline{56a61}$  și  $\overline{5a461}$ ; c)  $\overline{162a1}$  și  $\overline{16a21}$ .

9. Determină toate numerele naturale de forma  $\overline{abc}$  cuprinse între 200 și 400 care au cifre nenule distincte și  $a + b < c - 4$ .

10. Scrie în cifre, apoi în litere numărul obținut prin înlocuirea literelor cuvântului *PRIETEN*, știind că  $I$  este cel mai mic număr natural de două cifre diferite,  $E$  este predecesorul par al lui  $I$ ,  $T$  este jumătatea sumei celor două vocale,  $P$  este sfertul lui  $E$ ,  $N$  este de 11 ori mai mic decât numărul natural format din două cifre identice, cuprins între 30 și 40, iar  $R$  este aproximația prin lipsă până la zeci a celui mai mare număr de trei cifre diferite, pare.