

CUPRINS

ELEMENTE DE ALGEBRĂ

Capitolul 1. Grupuri

I.1. Lege de compoziție internă	3
I.2. Clase de resturi modulo n	8
I.3. Parte stabilă	11
I.4. Asociativitate. Comutativitate	14
I.5. Element neutru	20
I.6. Element simetrizabil	23
I.7. Monoizi	26
I.8. Grupuri	29
I.9. Reguli de calcul într-un grup	35
I.10. Grupuri de matrice	36
I.11. Grupuri de permutări	41
I.12. Morfisme și izomorfisme de grupuri	48
I.13. Grupuri finite	52
Probe de evaluare	54

Capitolul II. Inele. Corpuri

II.1. Inele	57
II.2. Inele de matrice. Morfisme de inele	61
II.3. Reguli de calcul în inele	64
II.4. Corpuri	66
Probe de evaluare	70

Capitolul III. Inele de polinoame cu coeficienți într-un corp comutativ

III.1. Mulțimea polinoamelor cu coeficienți complecși	72
III.2. Forma algebrică a unui polinom. Gradul unui polinom	76
III.3. Valoarea unui polinom. Funcția polinomială	80
III.4. Împărțirea polinoamelor	84
III.5. Schema lui Horner	88
III.6. Divizibilitatea polinoamelor	92
III.7. Rădăcinile polinoamelor. Teorema lui Bézout	96
III.8. Rezolvarea unor ecuații algebrice de grad superior	102
III.9. Relații între coeficienți și rădăcini (relațiile lui Viète)	107
III.10. Polinoame cu coeficienți reali	113
III.11. Polinoame cu coeficienți raționali. Polinoame cu coeficienți întregi	117
III.12. Inele de polinoame	123
III.13. Polinoame ireductibile	127
III.14. Polinoame cu coeficienți în \mathbf{Z}_p , p număr prim	131
Probe de evaluare	133

ELEMENTE DE ANALIZĂ MATEMATICĂ

Capitolul IV. Primitive

IV.1. Probleme care conduc la noțiunea de primitivă	136
IV.2. Primitivele unei funcții	138

IV.3. Operații cu funcții care admit primitive	144
IV.4. Funcții care admit primitive. Funcții care nu admit primitive	148
IV.5. Integrarea prin părți	152
IV.6. Integrarea anumitor tipuri de funcții	156
IV.7. Integrarea prin recurență	159
IV.8. Schimbarea de variabilă	162
IV.9. Descompunerea funcțiilor raționale în funcții raționale simple	168
IV.10. Determinarea primitivelor funcțiilor raționale simple	175
IV.11. Integrarea funcțiilor raționale	179
IV.12. Integrarea funcțiilor trigonometrice	182
Probe de evaluare	185

Capitolul V. Integrala definită

V.1. Probleme care conduc la noțiunea de integrală definită	189
V.2. Definierea integralei definite a unei funcții continue	192
V.3. Proprietăți ale integralei definite	195
V.4. Integrarea prin părți a integralelor definite	201
V.5. Schimbarea de variabilă pentru integrale definite	205
V.6. Probleme de sinteză	210
Probe de evaluare	215

Capitolul VI. Aplicații ale integralei definite

VI.1. Aria unei suprafețe plane	217
VI.2. Volumul unui corp de rotație	221
Probe de evaluare	225
Probleme de sinteză	226
Probleme pentru pregătirea examenului de bacalaureat	230
<i>Soluții</i>	241
Bibliografie	264

BIBLIOGRAFIE

- I.D. Ion, Nicolae R. – „Algebră”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1981
- Năchilă P., Becheanu M., Brânzei D. – „Subiecte posibile pentru admitere”, Editura Paralela 45, Pitești 1997
- Năchilă P., Stoica C. – „Probleme pentru admiterea în învățământul superior”, Editura Scorpion, București 1997
- Nicolescu M. – „Analiză Matematică”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1980
- Roșculeț M. – „Analiza matematică”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1984
- Sirețchi Gh. – „Calcul diferențial și integral”, Editura Științifică și Enciclopedică, București 1985
- Donciu N., Flondor D. – „Algebră și analiză matematică”, Editura Didactică și Pedagogică, București 1967
- Chițescu I., Alexandrescu P. – „Analiza matematică”, Editura Paralela 45, Pitești 2000

III.10. Polinoame cu coeficienți reali

Teoremă. Fie $f \in \mathbb{R}[X]$, $f \neq 0$. Dacă $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$, este rădăcină a polinomului f , atunci:

- a) $\bar{z} = a - bi$ este rădăcină a polinomului f ;
- b) z și \bar{z} au același ordin de multiplicitate.

Demonstrație. a) Știm că, dacă $f \in \mathbb{R}[X]$, $z \in \mathbb{C}$, atunci $f(\bar{z}) = \overline{f(z)}$. Deoarece $f(z) = 0$ rezultă că $f(\bar{z}) = 0$ și deci \bar{z} este rădăcină a lui f .

b) Fie $m \in \mathbb{N}^*$ ordinul de multiplicitate al rădăcinii z . Atunci există un polinom g astfel încât $f = (X - z)^m \cdot g$ și $g(z) \neq 0$. Avem $z \neq \bar{z}$ deoarece $b \neq 0$. Deoarece $f(\bar{z}) = 0$ rezultă că $(z - \bar{z})^m \cdot g(\bar{z}) = 0$, adică $g(\bar{z}) = 0$.

Atunci există un polinom g_1 astfel încât $g = (X - \bar{z}) \cdot g_1$ și deci $f = (X - z)^{m-1} (X - \bar{z})(X - z) \cdot g_1 = [X^2 - (z + \bar{z})X + z\bar{z}] \cdot (X - z)^{m-1} \cdot g_1 = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)(X - z)^{m-1} \cdot g_1$. Cum f și $X^2 - 2aX + a^2 + b^2$ sunt polinoame din $\mathbb{R}[X]$ rezultă că $(X - z)^{m-1} \cdot g_1 = f_1 \in \mathbb{R}[X]$.

Dacă $m > 1$, se continuă procedeul cu f_1 . După m pași obținem descompunerea lui f astfel $f = (X^2 - 2aX + a^2 + b^2)^m \cdot h = (X - z)^m (X - \bar{z})^m h$, unde $h \in \mathbb{R}[X]$. Deci $(X - \bar{z})^m \mid f$ și $(X - \bar{z})^{m+1}$ nu divide pe f , deoarece în acest caz $h(\bar{z}) = 0$ și deci $h(z) = 0$, adică $(X - z)^{m+1} \mid f$ (fals).

Observații.

■ Dacă $f \in \mathbb{C}[X]$ și $z \in \mathbb{C}$ este rădăcină a lui f , atunci este posibil ca f să nu aibă rădăcina \bar{z} .

EXEMPLU



Polinomul $f = X^2 + (1 - i)X - i$ are rădăcina i și nu are rădăcina $\bar{i} = -i$.

■ Teorema este foarte utilă pentru determinarea rădăcinilor unor ecuații algebrice cu coeficienți reali când se cunoaște o rădăcină complexă a sa.

Exercițiul rezolvat 1. Să se determine $a, b \in \mathbb{R}$ știind că ecuația $x^4 - 5x^3 + 10x^2 + ax + b = 0$ admite rădăcina $x_1 = 1 + i$.

Soluția 1. $f(1 + i) = 0 \Leftrightarrow a + b + 6 + i(a + 10) = 0 \Leftrightarrow a + b + 6 = 0, a + 10 = 0 \Leftrightarrow a = -10, b = 4$. Ecuația are și rădăcina $x_2 = 1 - i$. Deoarece $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, $x_1 x_2 x_3 x_4 = 4$ rezultă că $x_3 + x_4 = 3, x_3 x_4 = 2$ și deci $x_{3,4}$ sunt rădăcinile ecuației $x^2 - 3x + 2 = 0$, adică $x_{3,4} \in \{1, 2\}$.