

TATIANA CORINA DOESCU

**MATEMATICĂ
PENTRU
MODELARE ECONOMICĂ**

VOL. II



EDITURA UNIVERSITARĂ
București, 2013

CUPRINS

Preambul	9
Capitolul 5. TEORIA PROBABILITĂȚILOR	11
5.1 Introducere în teoria probabilităților	11
5.1.1 Experiențe aleatoare. Noțiuni primare	12
5.1.2 Aplicație demonstrativă	16
5.1.3. Rezumat	21
5.1.4. Concepte și termeni de referință	22
5.2 Modelarea matematică a unei experiențe	23
5.2.1 Modelul matematic al unei experiențe cu un număr finit de evenimente elementare	23
5.2.2 Corp, corp borelian, sistem de generatori	26
5.2.3 Modelul matematic al unei experiențe cu o mulțime infinit numărabilă de evenimente elementare	29
5.2.4 Produs de câmpuri de evenimente	33
5.2.5 Frecvența relativă a evenimentelor	37
5.2.6 Modelarea probabilistă a unei experiențe	41
5.2.7 Probabilități subiective	56
5.2.8 Rezumat	57
5.2.9 Concepte și termeni de referință	62
5.3 Dezvoltări ale modelului probabilist	63
5.3.1 Aplicație demonstrativă	63
5.3.2 Evenimente independente	70
5.3.3 Probabilități condiționate	74
5.3.4 Aplicație demonstrativă	80
5.3.5 Câmpuri boreliene independente	81
5.3.6 Produs de câmpuri boreliene de probabilitate	82
5.3.7 Sumă directă de câmpuri de probabilitate	83
5.3.8 Rezumat	88
5.3.9 Concepte și termeni de referință	93
5.4 Modele probabiliste clasice	94
5.4.1 Modelul lui Bernoulli sau modelul binomial	94
5.4.2 Modelul multinomial	99
5.4.3 Modelul lui Poisson	105
5.4.4 Probabilități de trecere	109
5.4.5 Modelul hipergeometric	115
5.4.6 Generalizarea modelului hipergeometric	125
5.4.7. Modelul lui Pascal	129
5.4.8 Rezumat	133
5.4.9 Concepte și termeni de referință	137

5.5	Variabile aleatoare	138
5.5.1	Modelarea probabilistă a unei mărimi aleatoare	138
5.5.2	Repartiție, funcție de repartiție	149
5.5.3	Aplicație demonstrativă	160
5.5.4	Variabile aleatoare discrete	162
5.5.5	Produs infinit de câmpuri de probabilitate	170
5.5.6	Variabile aleatoare reale continue	173
5.5.7	Aplicație demonstrativă	178
5.5.8	Variabile aleatoare reale bidimensionale	181
5.5.9	Independența variabilelor aleatoare	190
5.5.10	Aplicație demonstrativă	198
5.5.11	Variabile aleatoare bidimensionale discrete	201
5.5.12	Aplicație demonstrativă	207
5.5.13	Operații cu variabile aleatoare discrete	210
5.5.14	Variabile aleatoare bidimensionale continue	212
5.5.15	Variabile aleatoare bidimensionale mixte	218
5.5.16	Variabile aleatoare definite pe un câmp produs	223
5.5.17	Funcții de variabile aleatoare bidimensionale	228
5.5.18	Operații cu variabile aleatoare continue	230
5.5.19	Rezumat	234
5.5.20	Concepte și termeni de referință	256
5.6	Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare	258
5.6.1	Repartiții ale variabilelor aleatoare rezultate din operații	258
5.6.2	Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare unidimensionale ..	261
5.6.3	Inegalități	272
5.6.4	Caracteristici numerice ale variabilelor aleatoare bidimensionale. Covarianță. Coeficient de corelație	275
5.6.5	Drepte de regresie	285
5.6.6	Rezumat	286
5.6.7	Concepte și termeni de referință	295
5.7	Funcția caracteristică	296
5.8	Repartiții clasice unidimensionale	302
5.8.1	Repartiții clasice discrete	302
5.8.1.1	Repartiția discretă uniformă	302
5.8.1.2	Repartiția binomială (Bernoulli)	305
5.8.1.3	Repartiția Poisson	309
5.8.1.4	Repartiția geometrică	313
5.8.2	Repartiții clasice continue	315
5.8.2.1	Repartiția uniformă continuă	315
5.8.2.2	Repartiția normală	316
5.8.2.3	Repartiția gama	320
5.8.2.4	Repartiția exponențială	321
5.8.2.5	Repartiția beta	322

5.8.2.6 Repartiția Student	323
5.8.2.7 Repartiția hi-pătrat	326
5.8.2.8 Repartiția Fisher-Snedecor	329
5.8.3 Repartiția normală bidimensională	333
5.8.4 Generarea de variabile aleatoare cu ajutorul calculatorului	337
5.8.5 Rezumat	340
5.8.6 Concepte și termeni de referință	354
5.9. Șiruri de variabile aleatoare	356
5.9.1 Tipuri de convergență	356
5.9.2 Teoreme limită	361
5.9.3 Legea numerelor mari	364
5.9.4 Rezumat	372
5.9.5 Concepte și termeni de referință	377
5.10 Probleme rezolvate	378
5.11 Probleme propuse	422
Capitolul 6. STATISTICA MATEMATICĂ	439
6.1 Introducere în statistica metematică	439
6.2 Elemente de teoria selecției	440
6.2.1 Selecții bernoulliene	445
6.2.2 Funcții de selecție	457
6.2.2.1 Momente inițiale de selecție	457
6.2.2.2 Momente centrate de selecție	460
6.2.2.3 Aplicație demonstrativă	464
6.2.3 Selecții dintr-o populație normală	466
6.2.4 Comportarea asimptotică a momentelor de selecție	472
6.2.5 Aplicație demonstrativă	474
6.2.6 Rezumat	475
6.2.7 Concepte și termeni de referință	486
6.3 Elemente de teoria estimației	488
6.3.1 Estimare punctuală	490
6.3.1.1 Estimatori punctuali și estimații punctuale	490
6.3.1.2 Metode de estimare punctuală	496
6.3.1.2.1 Metoda momentelor	496
6.3.1.2.2 Metoda verosimilității maxime	500
6.3.2 Estimarea prin intervale de încredere	508
6.3.2.1 Interval de încredere pentru parametrul m al repartiției $N(m, \sigma)$ când σ este cunoscut	511
6.3.2.2 Interval de încredere pentru parametrul m al repartiției $N(m, \sigma)$ când σ este necunoscut	516
6.3.2.3 Interval de încredere pentru σ^2 pătratul parametrului σ al repartiției $N(m, \sigma)$	519
6.3.3 Rezumat	523

6.3.4	Concepte și termeni de referință	533
6.4	Verificarea ipotezelor statistice	534
6.4.1	Noțiuni introductive	534
6.4.2	Teste statistice	538
6.4.3	Teste referitoare la parametrii repartiției normale	542
6.4.3.1	Testul Z	542
6.4.3.1.1	Testul Z bilateral	543
6.4.3.1.2	Testul Z unilateral dreapta	545
6.4.3.1.3	Testul Z unilateral stânga	547
6.4.3.2	Testul T	549
6.4.3.2.1	Testul T bilateral	551
6.4.3.2.2	Testul T unilateral dreapta	553
6.4.3.2.3	Testul T unilateral stânga	554
6.4.3.3	Testul F	556
6.4.4	Teste neparametrice (de concordanță)	563
6.4.4.1	Testul de concordanță hi-pătrat	564
6.4.4.2	Testul de concordanță Kolmogorov	572
6.4.5	Rezumat	577
6.4.6	Concepte și termeni de referință	593
6.5	Probleme rezolvate	594
6.6	Probleme propuse	618
	BIBLIOGRAFIE	624
	ANEXĂ	627
	Tabele	648

PREAMBUL

Modelarea economică este prezentă în activitatea celor competenți în a prelucra informația din domeniul economic.

O categorie importantă de fenomene economice se produc într-un mediu învadat de incertitudine, un factor care îl poate împiedica pe cel angajat să adopte decizia adecvată, generatoare de profit.

Abordarea mediului economic în care incertitudinea joacă un rol esențial presupune o competență specială din partea celui care face această întreprindere, motiv pentru care acest volum se adresează studentului, licențiatului sau masterandului în economie și chiar tuturor acelor care doresc să dobândească această specializare.

Mijloace potrivite în depășirea efectelor incertitudinii există, iar aceste mijloace se dobândesc și prin acumularea de cunoștințe din teoria probabilităților sau din statistica matematică.

Modelarea economică primește un sprijin avizat în primul rând din partea teoriei probabilităților, care fiind o teorie matematică de sorginte empirică are ca obiect de studiu modelarea fenomenelor cu cel puțin o componentă aleatoare, atributul „aleator” certificând prezența incertitudinii în evoluția fenomenului.

În al doilea rând, modelarea economică primește din partea statisticii matematice o ofertă consistentă de tehnici și metode, special create pentru a elabora în condiții de incertitudine decizii fundamentate riguros în domenii cum ar fi: comerț, turism, marketing, finanțe, agricultură, industrie, asigurări de bunuri și persoane, prognoza economică pe diferite termene, medicină și enumerarea ar putea continua.

Acest volum este alcătuit formal din două capitole, numerotate prin 5 și respectiv 6, marcându-se astfel continuarea numerotării începute în primul volum. Această continuare se justifică mai ales prin faptul că rezultatele expuse în primul volum constituie fundamentul cunoștințelor prezentate în acest al doilea volum.

Cunoștințele de teoria probabilităților expuse în capitolul 5 sunt grupate în următoarele secțiuni: introducere în teoria probabilităților, modelarea matematică a unei experiențe, dezvoltări ale modelului probabilist, modele probabiliste clasice, variabile aleatoare, caracteristici

numerice ale variabilelor aleatoare, funcția caracteristică, repartiții clasice unidimensionale, șiruri de variabile aleatoare.

Obiectul capitolului 6 îl formează secțiunile: teoria selecției, teoria estimăției, verificarea ipotezelor statistice.

Conținutul capitolului 5 îl introduce pe cititor într-un spațiu în care gândirea probabilistă și inventivitatea matematicianului probabilist a construit noțiuni și instrumente teoretice adecvate cuantificării șanseii de a se realiza într-un mediu incert a unui fenomen aleator. Cel care acumulează cunoștințele oferite în acest capitol dobândește competența de a modela probabilist fenomenele economice afectate de incertitudine.

Prezentarea din capitolul 6 se face într-un cadru oferit de modelarea matematică în general și în particular de modelarea probabilistă. Prezentarea subliniază, de fiecare dată când este cazul, distanța existentă între modelul probabilist construit pe baza unor ipoteze și realitatea statistică modelată, distanță care impune specificarea erorilor modelării pricinuite de prezența incertitudinii. Acumularea cunoștințelor din acest capitol generează competența de a gândi și a modela statistic-inferențial.

Fiecare secțiune se încheie cu un rezumat, urmat de listarea conceptelor și noțiunilor reprezentative, iar fiecare capitol se încheie cu aplicații rezolvate și aplicații propuse spre rezolvare, cu răspunsurile aferente.

Capitolul 5

TEORIA PROBABILITĂȚILOR

5.1 Introducere în teoria probabilităților

Începuturile teoriei probabilităților se află în secolul XVII și au fost generate de interesul în a cuantifica șansele de câștig ale unui participant la un joc de noroc, interes care nu și-a pierdut din intensitate de-a lungul timpului, fiind prezent și astăzi. Problema cuantificării unui fenomen este frecventă în știință sau în tehnică și chiar în viața cotidiană, rezolvarea ei implicând mai multe eforturi ale gândirii, imaginației și creativității colective, pornind de la o descriere cât mai exactă a fenomenului.

Încercarea de a preciza și a descrie fenomenul numit șansă sau noroc a condus la elaborarea și dezvoltarea unor instrumente teoretice care să măsoare magnitudinea șansei într-un cadru științific bine delimitat numit astăzi teoria probabilităților. Printre personalitățile științifice ale lumii care și-au adus contribuții semnificative la dezvoltarea acestei teorii se pot enumera G. Galileu la începutul secolului al XVII-lea, Fermat (1601 – 1665), Pascal (1623 – 1662) și Huygens (1629 – 1695) care au studiat jocurile de noroc, Jacob Bernoulli (1654 – 1705) care a demonstrat legea numerelor mari, o teoremă fundamentală a teoriei probabilităților, Moivre (1667 – 1754) care a studiat repartiția normală, ce a permis enunțarea și demonstrarea teoremei limite centrale, Laplace (1749 – 1827) care expus concis fundamentele teoriei probabilităților și a aplicat rezultatele teoretice în teoria erorilor de observare și măsurare, Gauss (1777 – 1855) care a studiat în profunzime repartiția normală și a elaborat metoda celor mai mici pătrate deosebit de utilizată astăzi, Poisson (1781 – 1840) care a aplicat prima dată teoria probabilităților la studierea tragerilor cu armament, iar ca omagiu posteritatea a numit una din repartițiile discrete cu numele său, P. Cebâșev (1821 – 1894), care a elaborat metoda momentelor, A. Markov (1856 – 1922) care a pus bazele teoriei proceselor stochastice, A. Liapunov (1857 – 1918) care a elaborat metoda funcțiilor caracteristice, A.N. Kolmogorov (1903 – 1987) care a axiomatizat teoria probabilităților,

creându-i fundamentul și N. Wiener, W. Feller și J. Doob care au dezvoltat teoria proceselor stochastice. Există o școală românească de teoria probabilităților întemeiată de academicienii Gheorghe Mihoc, Octav Onicescu, Ioan Cuculescu, Marius Iosifescu, care și astăzi își aduce contribuții semnificative, atât teoretice cât și în domeniul aplicațiilor teoriei probabilităților.

Într-o prezentare succintă, teoria probabilităților este o teorie matematică, esențial deductivă, de sorginte empirică, având ca obiect de studiu modelarea fenomenelor cu cel puțin o componentă întâmplătoare sau aleatoare. Noțiunea centrală a teoriei este probabilitatea, care se referă la aspectul cantitativ al categoriei filozofice de posibilitate, fiind o măsură a posibilității de producere sau realizare a unui eveniment aleator în condiții specificate.

5.1.1 Experiențe aleatoare. Noțiuni primare

În încercarea de a preciza condițiile generale în care apare nevoia de a cuantifica șansa de realizare a unui fenomen aleator constatăm că mai întâi trebuie să ne fixăm un vocabular de lungime minimă, ale cărui cuvinte să aibă un sens unic și bine definit.

Din multitudinea de posibilități acest vocabular conține, pentru început, cuvintele experiență, experiență aleatoare, probă a unei experiențe, eveniment elementar, operații cu evenimente elementare, eveniment, realizarea unui eveniment, eveniment sigur, eveniment imposibil și al căror sens îl prezentăm în continuare.

Prin **experiență** sau **experiment** înțelegem realizarea, chiar repetată, a unui complex de condiții materiale sau de altă natură, asupra cărora acționează un factor sau un set de factori, producându-se un efect sau rezultat, având mai multe componente în general. Iată câteva exemple de experiențe, în care acțiunea asupra complexului de condiții este un factor uman:

a) Într-o eprubetă în care se află acid clorhidric se introduce o bucată de cupru. Rezultatul experienței este o anumită cantitate de clorură de cupru și o degajare de hidrogen.

b) Dintr-o urnă în care se află șase bile de aceleași dimensiuni, numerotate de la unu la șase se extrage la întâmplare o bilă. Rezultatul extragerii poate fi oricare din cele șase bile.

c) Se cronometrează durata operației de înregistrare a mărfurilor aflate în coșul de cumpărături ale unui client, de către o casieră a unui

supermarket. Rezultatul poate fi o valoare aflată într-un interval de timp de forma (t_1, t_2) .

d) Operația de cântărire a unui produs poate avea ca rezultat o valoare situată într-un interval $[a, b]$, exprimată în unități de greutate.

Diverse fenomene naturale se pot considera ca fiind realizarea unor complexe de condiții asupra cărora acționează factori naturali, astfel că ne vom referi la ele ca la niște experiențe “organizate” de natură, ca de exemplu nașterea sau decesul, dezintegrarea unei substanțe radioactive, exploziile vulcanice, revărsările unui râu, cutremurele de pământ, diverse fenomene astronomice: eclipse, apariția meteoriților sau a cometelor, etc..

Sintagmele **aleator**, **întâmplător**, **incert** sau **aleatoriu** sunt sinonime și semnifică atributele de a fi imprevizibil, fortuit, neprevăzut, incontrollabil, nesigur sau imposibil de anticipat. După cum rezultatul unei experiențe este sau nu complet cunoscut înainte de desfășurarea ei, experiențele se clasifică în **deterministe** sau **aleatoare**.

O experiență este **deterministă** dacă rezultatul său este previzibil, sigur și complet cunoscut, chiar înainte de desfășurarea ei. Astfel, exemplul a) prezintă o experiență determinată, având în vedere că rezultatul ei este prevăzut de teoria reacțiilor chimice și orice reluare a experienței are același rezultat. Apariția soarelui în cursul unei zile și apariția unei comete cunoscute se pot considera experiențe deterministe, deoarece astronomii pot prevedea cu exactitate aceste apariții, conform legilor mișcării corpurilor cerești.

O experiență este **aleatoare** (engl. **random experiment**) dacă rezultatele ei nu pot fi prevăzute cu exactitate, cunoscându-se doar o clasă de rezultate posibile ale acesteia. Astfel, exemplele b), c) și d) prezintă experiențe aleatoare, deoarece rezultatul acestor experiențe nu este previzibil și face parte dintr-o clasă de rezultate posibile. Deoarece nu pot fi prevăzute cu exactitate nașterile sau decesele, cutremurele sau exploziile vulcanice, dar și revărsările apelor se pot considera fenomene aleatoare naturale, ce fac parte din categoria experiențelor aleatoare.

Precizare. Experiențele aleatoare sunt în atenția teoriei probabilităților, nu și experiențele deterministe.

Din acest motiv se vor considera numai experiențe aleatoare, numite pe scurt **experiențe** sau **experimente**.

Prin **probă** (engl. **trial**) a unei experiențe se înțelege o realizare efectivă a experienței care produce un rezultat, ce aparține unei clase de rezultate posibile atașate experienței. Unii autori au numit probă rezultatul experienței și nu realizarea experienței în sine.

Sintagma **eveniment elementar** (engl. **simple event**) desemnează rezultatul unei singure probe a unei experiențe, ce face parte din

clasa de rezultate posibile și se poate vorbi despre clasa tuturor evenimentelor elementare generate de o experiență, ce se va numi **spațiul observațiilor** (engl. **sample space**). În acest context, dacă rezultatul unei probe este un eveniment elementar, notat prin A , atunci se spune că evenimentul A **s-a realizat în acea probă**.

Exemplu.

Se aruncă un zar pe o suprafață plană. Spațiul observațiilor este alcătuit din șase evenimente elementare, ce reprezintă apariția feței cu unul, două, trei, patru, cinci și respectiv șase puncte. Cu ajutorul evenimentelor elementare putem răspunde la întrebări cum ar fi: se poate obține la aruncarea zarului o față cu un număr par de puncte?

Răspunsul poate fi formulat astfel: la apariția oricăreia din fețele cu două **sau** patru **sau** șase puncte.

Astfel de întrebări sugerează că pentru evenimentele elementare ce alcătuiesc spațiul observațiilor generate de o experiență, să se considere operația “sau” *de compunere* a două evenimente elementare al cărui rezultat este numit **eveniment compus**, pe scurt **eveniment**. Un astfel de eveniment **se realizează într-o probă**, dacă în acea probă se realizează unul sau altul din evenimentele elementare ce îl compun.

Dacă notăm operația “sau” prin \vee și evenimentele elementare prin respectiv A_1, A_2, \dots, A_6 , atunci răspunsul de mai sus capătă forma:

$$A_2 \vee A_4 \vee A_6.$$

Putem să ne întrebăm ce reprezintă scrierea $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6$. Conform celor de mai sus, este vorba de evenimentul care se realizează la apariția oricăreia din fețele zarului și nu există nicio îndoială că acest eveniment se realizează, indiferent de probă. Acest eveniment, remarcabil prin *siguranța cu care se realizează* se numește evenimentul **sigur** și este notat prin S .

La întrebarea dacă se poate obține o față cu mai multe puncte decât șase sau cu zero puncte ori două sau mai multe fețe odată, fără nicio îndoială putem răspunde negativ. Aici este vorba de un alt eveniment remarcabil prin *imposibilitatea de a se realiza*, indiferent de probă, numit evenimentul **imposibil**, care este notat prin L . Se observă că nu se poate exprima evenimentul imposibil cu ajutorul operației “sau”.

Rezultă că experiența cu zarul generează șase evenimente elementare, evenimentul sigur, evenimentul imposibil, evenimentele de forma $A_i \vee A_j, i, j \in \{1, 2, \dots, 6\}, i \neq j$, în număr de $C_6^2 = 15$, evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k, i, j, k \in \{1, 2, \dots, 6\}, i \neq j, i \neq k, j \neq k$, în număr de $C_6^3 = 20$, evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m, i, j, k, m \in \{1, 2, \dots, 6\}$, unde cei patru

indici sunt distincți doi câte doi, în număr de $C_6^4 = 15$ și evenimentele de forma $A_i \vee A_j \vee A_k \vee A_m \vee A_n, i, j, k, m, n \in \{1, 2, \dots, 6\}$, unde cei cinci indici sunt distincți doi câte doi, în număr de $C_6^5 = 6$. Altfel spus, numărul tuturor evenimentelor generate de experiența cu zarul este $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 + C_6^3 + C_6^4 + C_6^5 + C_6^6 = 2^6$.

Clasa tuturor evenimentelor generate de o experiență se va numi **spațiul rezultatelor**.

Între evenimentele din spațiul rezultatelor, care sunt generate de o experiență fixată, alături de operația “sau” se mai pot defini încă trei **operații**: “și”, notată \wedge , “opusul”, notat \neg , “minus”, notat $-$.

Pentru a defini, în general cele patru operații de mai sus considerăm două evenimente, notate prin A și B , dintre evenimentele generate de experiență.

Evenimentul “ A sau B ”, notat $A \vee B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă se realizează în acea probă fie evenimentul A , fie evenimentul B .

Evenimentul “ A și B ”, notat $A \wedge B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă se realizează în acea probă și evenimentul A și evenimentul B .

Evenimentul “opusul lui A ”, notat $\neg A$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă în acea probă nu se realizează evenimentul A . De exemplu, evenimentul sigur este opusul evenimentului imposibil și invers.

Evenimentul “ A minus B ”, notat $A - B$, este acel eveniment care se realizează într-o probă, dacă în acea probă se realizează evenimentul A și nu se realizează evenimentul B .

Exercițiu.

Cum știm dacă unul din evenimentele $B \vee A, B - A$ și $\neg B$ s-a realizat? Cine este evenimentul $\neg S$? Propunem cititorului să dea răspunsurile complete.

Observație.

Dacă spațiul observațiilor determinat de o experiență este alcătuit dintr-un număr finit de evenimente elementare, $n \in \mathbf{N}^*$, atunci numărul tuturor evenimentelor generate de experiență este 2^n .

Exercițiu.

Propunem cititorului să indice o experiență cu cel puțin cinci evenimente elementare, la care să precizeze spațiul observațiilor și spațiul rezultatelor.

5.1.2 Aplicație demonstrativă

Dintr-o urnă cu trei bile de același fel, numerotate de la unu la trei se extrage la întâmplare o bilă. Rezultatul experienței poate fi unul din evenimentele elementare „bila cu numărul unu”, notat A_1 , „bila cu numărul doi”, notat A_2 și „bila cu numărul trei”, notat A_3 . Atunci spațiul observațiilor atașat experienței este format din rezultatele sau evenimentele elementare A_1, A_2 și A_3 . Conform observației de mai sus numărul tuturor evenimentelor generate de experiență este $2^3 = 8$ și anume: $L, A_1, A_2, A_3, A_1 \vee A_2, A_1 \vee A_3, A_2 \vee A_3, S$.

Cu ajutorul operațiilor se obțin și următoarele evenimente:

$$\begin{aligned} & A_1 \vee A_2 \vee A_3, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3, \neg A_1, \neg A_2, \neg A_3, (A_i \vee A_j) \vee A_k, \\ & A_i \vee (A_j \vee A_k), (A_i \vee A_j) \wedge A_k, A_i \wedge (A_j \vee A_k), A_i \vee A_j \vee A_k, \\ & (A_i \vee A_k) \vee (A_j \wedge A_k), (A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_m), A_i \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m), \\ & (A_i \vee A_j) \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1, 2, 3\}, (A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3), \\ & (A_i \vee A_j) - A_k, i, j, k \in \{1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

Aici parantezele delimitează un eveniment compus.

Observăm că evenimentul $A_1 \vee A_2$ se realizează într-o probă, dacă și numai dacă în acea probă se realizează evenimentul $A_2 \vee A_1$. Ca urmare, cele două evenimente sunt **identice** și scriem $A_1 \vee A_2 \equiv A_2 \vee A_1$. Imediat observăm că $A_1 \vee A_3 \equiv A_3 \vee A_1, A_2 \vee A_3 \equiv A_3 \vee A_2$.

În general, fie o experiență care generează evenimentele A și B . Evenimentul A este **identic** cu evenimentul B și se scrie $A \equiv B$, dacă nu există nicio probă în care să se realizeze unul fără ca și celălalt să se realizeze. Altfel spus, cele două evenimente nu se pot distinge unul de celălalt.

Se poate realiza evenimentul $A_1 \wedge A_2$? Nu, deoarece ar trebui să se realizeze simultan evenimentele A_1 și A_2 , ceea ce este imposibil. Deci se poate scrie: $A_1 \wedge A_2 \equiv L$. Printr-un raționament analog deducem: $A_1 \wedge A_3 \equiv L, A_2 \wedge A_3 \equiv L, A_1 \wedge A_2 \wedge A_3 \equiv L$, iar în general, deducem $A_i \wedge A_j \equiv L$, dacă $i \neq j, i, j \in \{1, 2, 3\}$, $A_i \wedge A_j \equiv A_i$, dacă $i = j, i, j \in \{1, 2, 3\}$.

Cine este evenimentul $A_i \wedge A_j \wedge A_k$? În ce condiții $A_i \wedge A_j \wedge A_k$ nu este identic cu evenimentul imposibil? Propunem cititorului să dea răspunsurile complete.

Când se realizează evenimentul $A_1 \vee A_2 \vee A_3$? Atunci când se realizează sau A_1 sau A_2 sau A_3 , adică în orice probă a experienței. Cu alte cuvinte, evenimentul $A_1 \vee A_2 \vee A_3$ este evenimentul sigur. Deci se poate scrie:

$$A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv S.$$

Se pot pune următoarele întrebări: cine este evenimentul $A_i \vee A_j \vee A_k$? În ce condiții $A_i \vee A_j \vee A_k \equiv S$? Lăsăm cititorul să afle răspunsul la prima întrebare și răspundem la cea de a doua, astfel: relația este adevărată ori de câte ori $i \neq j, j \neq k, k \neq i, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Cine este evenimentul $\neg A_1$? Este evenimentul care se realizează când nu se realizează A_1 , adică atunci când se realizează evenimentul elementar A_2 sau când se realizează evenimentul elementar A_3 . Prin urmare, $\neg A_1$ este identic cu evenimentul compus $A_2 \vee A_3$ și se poate scrie $\neg A_1 \equiv A_2 \vee A_3$. Analog se deduce $\neg A_2 \equiv A_1 \vee A_3$.

Cine este evenimentul $\neg A_3$? Dar cine este evenimentul $\neg(A_2 \vee A_3)$? Propunem cititorului să afle răspunsurile. În ajutor vine răspunsul la următoarea întrebare: ce se poate spune despre evenimentul $\neg(\neg A_3)$? Este evenimentul care se realizează când nu se realizează evenimentul $\neg A_3$, adică când se realizează A_3 și deci $\neg(\neg A_3) \equiv A_3$. Utilizând același raționament se deduce că:

$$\neg(\neg A_i) \equiv A_i, \forall i = \overline{1, 3}.$$

Este adevărată afirmația că evenimentele $(A_i \vee A_j) \vee A_k, A_i \vee (A_j \vee A_k), A_i \vee A_j \vee A_k, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ sunt identice? Cum se justifică răspunsul corect?

Indicație: răspunsul este identic cu răspunsul la întrebarea: este adevărată scrierea $\neg(A_2 \vee A_3) \equiv A_1$?

Să determinăm evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge A_k$. Pentru $i = k$ sau $j = k$ el este identic cu evenimentul A_k , în rest este identic cu evenimentul imposibil, deoarece $A_i \vee A_j$ este identic cu $\neg A_k$ pentru $i \neq j$ și identic cu L pentru $i = j \neq k$. Propunem cititorului să stabilească dacă este adevărată relația:

$$(A_i \vee A_j) \wedge A_k \equiv (A_i \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_k), i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Evenimentul $(A_i \wedge A_j) \vee (A_i \wedge A_k), i, j, k \in \{1, 2, 3\}$ este identic cu evenimentul imposibil dacă $j \neq i$ și $k \neq i$, altfel este identic cu A_i . Adică este adevărată relația $A_i \wedge (A_j \vee A_k) \equiv (A_i \wedge A_j) \vee (A_i \wedge A_k)$. Analog se deduce relația:

$$(A_i \vee A_j) \wedge A_k \equiv (A_i \wedge A_k) \vee (A_j \wedge A_k), i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge (A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1, 2, 3\}$ este identic cu evenimentul reprezentat de una din paranteze dacă cele două paranteze sunt identice, este identic cu evenimentul imposibil dacă cele două paranteze sunt diferite și nu au nici un eveniment comun, iar altfel este identic cu evenimentul comun celor două paranteze.

Evenimentul $A_i \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1, 2, 3\}$ este identic cu evenimentul imposibil dacă indicii j, k și m sunt distincții toți odată de indicele i , iar altfel este identic cu evenimentul A_i . O variantă remarcabilă se obține în cazul $j \neq k, j \neq m, k \neq m$:

$$A_i \wedge S \equiv A_i, \forall i = \overline{1, 3}.$$

Evenimentul $(A_i \vee A_j) \wedge (A_j \vee A_k \vee A_m), i, j, k, m \in \{1, 2, 3\}$ este identic cu evenimentul A_j dacă indicii i, k și m sunt diferiți doi câte doi, altfel este identic cu evenimentul $A_i \vee A_j$.

Evenimentul $(A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3)$ este cel care se realizează la realizarea evenimentului din prima paranteză și la nerealizarea celei de-a doua paranteze. Deoarece evenimentul elementar A_2 se află în ambele paranteze, ca eveniment care se realizează dar și ca eveniment care nu se realizează, el nu intră în compunerea rezultatului. Pe de altă parte A_3 nu trebuie să se realizeze și deci nu se poate afla în rezultat. Singur A_1 formează rezultatul. Deci:

$$(A_1 \vee A_2) - (A_2 \vee A_3) \equiv A_1.$$

Lăsăm cititorului să descopere cine este evenimentul $(A_i \vee A_j) - A_k, i, j, k \in \{1, 2, 3\}$.

Observații.

1. Analiza evenimentelor generate de experiența de mai sus ne-a condus la introducerea relației „**identic**”, notată prin „ \equiv ”, care are sens și în cazul general între evenimente generate de o experiență oarecare.

2. Se observă că: $A_1 \wedge A_2 \equiv A_1 \wedge A_3 \equiv A_2 \wedge A_3 \equiv L$, aici am folosit tranzitivitate relației „identic”, și $A_1 \vee A_2 \vee A_3 \equiv S$.

Între evenimentele generate de o experiență se poate considera o nouă relație, numită relația „**implică**”, alături de relația „**identic**”.

Să ne fixăm o experiență care generează evenimentele A și B . Evenimentul A **implică** evenimentul B și se scrie $A \prec B$, dacă realizarea evenimentului A asigură realizarea evenimentului B . Dacă A și B sunt evenimente elementare, atunci între ele nu există relația „implică”, altfel între ele poate să existe această relație.

Relația „identic” se poate exprima cu ajutorul relației „implică” astfel:

$$A \equiv B, \text{ dacă și numai dacă } A \prec B \text{ și } B \prec A.$$

Faptul că evenimentele A și B nu sunt identice, înseamnă că sunt diferite și se notează $A \neq B$.

La întrebarea dacă există o probă a experienței în care să se realizeze împreună evenimentele A și B , răspunsul presupune considerarea a două situații: a) există cel puțin o probă în care se realizează ambele evenimente și b) nu există nicio probă în care să se realizeze ambele evenimente. Astfel, trebuie considerate două tipuri de evenimente.

Evenimentele A și B se numesc **compatibile**, dacă evenimentul $A \wedge B$ nu este evenimentul imposibil. În caz contrar A și B se numesc **incompatibile**, adică $A \wedge B \equiv L$. Un exemplu de evenimente incompatibile este dat de oricare două evenimente elementare, afirmație ilustrată și de punctul 2 al observației de mai sus.

Exemplu.

Se consideră următoarele evenimente generate de experiența prezentată în aplicația demonstrativă: $L, A_1, A_3, A_1 \vee A_2, A_2 \vee A_3, S$. Să stabilim relațiile dintre aceste evenimente și perechile de evenimente compatibile.

Realizarea evenimentului A_1 asigură realizarea evenimentelor $A_1 \vee A_2$ și S ; prin urmare sunt adevărate relațiile $A_1 \prec A_1 \vee A_2$ și $A_1 \prec S$. Deoarece realizarea evenimentului A_3 asigură realizarea evenimentelor $A_2 \vee A_3$ și S sunt adevărate relațiile $A_3 \prec (A_2 \vee A_3)$ și $A_3 \prec S$. Deoarece $S \equiv A_1 \vee A_2 \vee A_3$ se poate scrie $A_1 \vee A_2 \prec S$ și $A_2 \vee A_3 \prec S$.

În proba în care se realizează evenimentul A_1 se realizează și evenimentele $A_1 \vee A_2$ și S , iar în proba în care se realizează evenimentul $A_1 \vee A_2$ se realizează și evenimentul S ; prin urmare, perechile de evenimente A_1 și $A_1 \vee A_2$, A_1 și S , $A_1 \vee A_2$ și S sunt perechi de evenimente compatibile. Printr-un raționament analog se ajunge la concluzia că A_3 și $A_2 \vee A_3$, A_3 și S , $A_2 \vee A_3$ și S sunt perechi de evenimente

compatibile. Și perechea formată din evenimentele $A_1 \vee A_2$ și $A_2 \vee A_3$ este formată din evenimente compatibile.

Nu există nicio probă a experienței în care să se realizeze simultan evenimentele A_1 și A_3 , L și A_1 , L și A_3 , L și S ; prin urmare se poate scrie $A_1 \wedge A_3 \equiv L, L \wedge A_1 \equiv L, L \wedge A_3 \equiv L, L \wedge S \equiv L$, adică cele patru perechi sunt formate din evenimente incompatibile.

Propunem cititorului să afle cum sunt evenimentele A_2 și A_3 , A_2 și L , A_2 și S , $A_2 \vee A_3$ și A_1 , $A_2 \vee A_3$ și S .

Care sunt perechile de evenimente de forma (A, B) , unde A și B sunt din aplicația demonstrativă, ce satisfac relația $(A_1 \vee A) \wedge (A_2 \vee B) \equiv L$? Răspunsul este reprezentat de următoarele 8 perechi de evenimente $(L, L), (L, A_2), (L, A_3), (A_1, L), (A_3, L), (A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_3, A_2)$.

Întrebare.

Se poate spune că una dintre perechile de evenimente de forma (A, B) reprezintă un eveniment?

Pentru ca o pereche de forma (A, B) să reprezinte un eveniment ar trebui să existe o experiență care să genereze evenimente de această formă. Experiența despre care este vorba în exercițiu nu satisface această condiție și deci o pereche de forma (A, B) nu reprezintă un eveniment. Totuși, se pot considera cel puțin trei exemple de experiențe, care generează evenimente de forma (A, B) .

a) Din urna cu cele trei bile se extrag pe rând, la întâmplare, două bile, fără a reintroduce în urnă bila extrasă. Atunci spațiul observațiilor conține $A_3^2 = 3 \cdot 2$ elemente și este alcătuit din evenimentele elementare reprezentate de perechile de evenimente $(A_1, A_2), (A_1, A_3), (A_2, A_1), (A_2, A_3), (A_3, A_1), (A_3, A_2)$, iar numărul tuturor evenimentelor generate de experiență este $2^6 = 64$, pentru că alături de evenimentele elementare se află evenimentul imposibil, evenimentele compuse obținute cu operația \vee și evenimentul sigur. Din cele 8 perechi de evenimente aflate în discuție constatăm că perechile $(L, L), (L, A_2), (L, A_3), (A_1, L), (A_3, L)$ sunt identice cu evenimentul imposibil, iar celelalte trei sunt evenimente elementare. Concluzia este că această experiență este adecvată pentru a da răspunsul la întrebarea de mai sus.

b) Din urna cu cele trei bile se extrag pe rând, la întâmplare, două bile, reintroducând în urnă bila extrasă. Atunci spațiul evenimentelor elementare este alcătuit din 9 perechi, adăugându-se la cele 6 perechi de la punctul a) și