

Marius Perianu
Dana Heuberger
Ștefan Smărăndoiu
Cătălin Stănică
Ioan Balica



Mathematik

7. Klasse



Vorwort

Mathematik ist die Kunst, die Wirklichkeit zu konstruieren und der menschlichen Erkenntnis neue Bedeutungen zu verleihen. Der Definition von Kunst folgend setzt die Mathematik Übung und Geschicklichkeit, Wissen und ästhetischen Sinn und vor allem Vorstellungskraft und Intuition voraus. Die Mathematik ist das Gedicht der logischen Ideen, und die mathematischen Wahrheiten sind die Tonleitern, in denen die Symphonie der Naturgesetze geschrieben ist.

Die Mathematik der 7. Klasse ist die Geschichte großer Entdeckungen. Wir beginnen die Reise, indem wir die Realität mit neuen Größen und Formen messen (Lerneinheit 1: Die Menge der reellen Zahlen), dann übersetzen wir praktische Aufgaben in mathematische Modelle (Lerneinheit 2: Gleichungen und lineare Gleichungssysteme) und legen mathematische Koordinaten für die Welt um uns herum oder für alltägliche Tätigkeiten fest (Lerneinheit 3: Datenverarbeitung). Die Realität wird in neuen Formen dargestellt – in geraden Formen (Lerneinheit 4: Vierecke) oder Rundformen (Lerneinheit 5: Der Kreis) – und in größeren oder kleineren Dimensionen modelliert (Lerneinheit 5: Ähnlichkeit der Dreiecke). Da jedes Ende an den Anfang erinnert, bringt das letzte Abenteuer Zahlen und geometrische Figuren (Formen) zusammen (Lerneinheit 7: Metrische Beziehungen).

Damit unser mathematisches Abenteuer ein Erfolg wird, führt uns das Lehrbuch auf schülerfreundliche Weise durch Ideen, Konzepte, Definitionen und Lehrsätze und beruft sich auf Praxisnähe und Intuition. Die Einführung von mathematischen Konzepten gründet auf Beispielen aus der unmittelbaren Realität, auf alltäglichen Erfahrungen. So wird die Mathematik als eine offene, lebendige und dynamische Welt sichtbar, die eng mit allen Tätigkeitsbereichen verbunden ist und Situationen, Probleme, Phänomene oder Vorgänge formulieren, beschreiben und erklären kann.

Obwohl es nicht im Inhaltsverzeichnis steht, ist die eigentliche Lektion in diesem Lehrbuch diejenige, die uns lehrt, die Frage „Warum?“ zu stellen. Der Mathematikunterricht ist nicht einfach nur eine Lerntätigkeit, er *schult das Denken*. Bei jedem Schritt bietet das Lehrbuch Momente der Untersuchung, des Nachdenkens, Gelegenheiten, Fragen zu stellen und mögliche Antworten mit den Daten der analysierten Situationen in Beziehung zu setzen.

Die Mathematik ist die schönste und tiefgründigste Schöpfung des menschlichen Geistes. Die Menschheit braucht die Mathematik, denn alles im Universum wird nicht nur durch die Mathematik beschrieben, sondern besteht aus Mathematik.

Dieses Lehrbuch ist euer Wegweiser durch die wunderbare Welt der Mathematik.

Die Autoren

Vorstellung des Lehrbuchs

Das Lehrbuch umfasst sieben Einheiten, die alle Inhalte des Lehrplans abdecken. Die Lektionen, die eine Einheit bilden, werden zusammenhängend, einheitlich und folgerichtig präsentiert.

Jede Lektion beginnt mit einer praktischen Aufgabe, auf deren Grundlage neue Konzepte eingeführt werden. Diese werden dann in eine mathematische Sprache gefasst, die ein Gleichgewicht zwischen Anschaulichkeit und mathematischer Strenge herstellt. Neue Konzepte werden von aussagekräftigen Beispielen, Bemerkungen und Anwendungen begleitet.

Das Lehrbuch legt in bestimmten Abschnitten großen Wert auf kritisches Denken und die Entwicklung des Kopfrechnens und fördert gleichzeitig Gruppenaktivitäten, unabhängiges Denken und die Entwicklung von Selbstvertrauen. Die Bewertung erfolgt durch vielfältige Formen und Instrumente, die auf die Ausbildung und Entwicklung mathematischer Kompetenzen ausgerichtet sind.

Das Lehrbuch ist in 7 Lerneinheiten gegliedert.



Inhalt

EINHEIT 1

Die Menge der reellen Zahlen

1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1

EINHEIT 2

Gleichungen und Gleichungssysteme

1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2

EINHEIT 3

Elemente der Datenverarbeitung

1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3

EINHEIT 4

Das Viereck

1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4

EINHEIT 5

Der Kreis

1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5

EINHEIT 6

Ähnlichkeit der Dreiecke

1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6

EINHEIT 7

Metrische Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck

1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7

Lösungen

Seite Nr.	Lektionen
10	L1: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl
16	L2: Die Menge der reellen Zahlen
24	L3: Rechenregeln für Quadratwurzeln
30	L4: Addition und Subtraktion der reellen Zahlen
35	L5: Multiplikation und Division der reellen Zahlen
40	L6: Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten. Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen
45	L7: Rationalisieren des Nenners eines Bruchs
49	L8: Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen. Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen
53	L9: Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$
55	Wiederholung und Bewertung
58	L1: Umformen einer Gleichung in eine äquivalente Gleichung. Identitäten
62	L2: Gleichungen der Form $ax + b = 0$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. Die Lösungsmenge einer Gleichung. Äquivalente Gleichungen
68	L3: Lineare Gleichungssysteme mit zwei Unbekannten
74	L4: Lösen von Aufgaben mithilfe von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
79	Wiederholung und Bewertung
82	L1: Kartesisches Produkt zweier nicht leerer Mengen. Orthogonales Achsensystem in der Ebene. Darstellung von Paaren reeller Zahlen in einem orthogonalen Achsensystem. Darstellung von Punkten in einem orthogonalen Achsensystem. Abstand zwischen zwei Punkten in der Ebene
88	L2: Darstellung und Interpretation von funktionalen Abhängigkeiten durch Tabellen, Diagramme und Grafiken. Häufigkeitspolygon
95	Wiederholung und Bewertung
98	L1: Konvexes Viereck. Die Winkelsumme im konvexen Viereck
102	L2: Das Parallelogramm. Eigenschaften
107	L3: Anwendungen des Parallelogramms in der Dreiecksgeometrie. Mittellinie in einem Dreieck, Schwerpunkt eines Dreiecks
111	L4: Das Rechteck. Eigenschaften
115	L5: Der Rhombus. Eigenschaften
120	L6: Das Quadrat. Eigenschaften
125	L7: Das Trapez: Einteilung, Eigenschaften. Die Mittellinie im Trapez
131	L8: Umfänge und Flächeninhalte
138	Wiederholung und Bewertung
142	L1: Der Kreis. Sehnen und Bogen in einem Kreis. Eigenschaften
147	L2: Umfangswinkel
151	L3: Tangenten eines Kreises
155	L4: Regelmäßige Vielecke, die dem Kreis einbeschrieben sind
158	L5: Länge des Kreises und Flächeninhalt des Diskus
162	Wiederholung und Bewertung
166	L1: Proportionale Strecken. Lehrsatz der äquidistanten (abstandsgleichen) Parallelen
170	L2: Lehrsatz des Thales
175	L3: Ähnliche Dreiecke. Hauptsatz der Ähnlichkeit
179	L4: Ähnlichkeitskriterien der Dreiecke. Schätzen von Entfernungen im Alltag mithilfe der Ähnlichkeit
184	Wiederholung und Bewertung
188	L1: Orthogonale Projektionen auf einer Geraden. Der Höhensatz
192	L2: Der Kathetensatz
195	L3: Der Lehrsatz des Pythagoras
201	L4: Elemente der Trigonometrie im rechtwinkligen Dreieck
208	L5: Lösen des rechtwinkligen Dreiecks. Berechnung von Elementen in regelmäßigen Vielecken. Schätzen der Entfernungen in praktischen Situationen mithilfe der metrischen Beziehungen
214	Wiederholung und Bewertung
216	

Allgemeine und spezifische Kompetenzen

Allgemeine Kompetenzen

1. Mathematische Daten, Größen und Beziehungen in ihrem Kontext erkennen
2. Verarbeiten von quantitativen, qualitativen und strukturellen mathematischen Daten aus verschiedenen Informationsquellen
3. Anwendung spezifischer Konzepte und Algorithmen in verschiedenen mathematischen Kontexten
4. Ausdrücken von Informationen, Schlussfolgerungen und Lösungen für eine bestimmte Situation in mathematischer Sprache
5. Analysieren der mathematischen Eigenschaften einer bestimmten Situation
6. Mathematisches Modellieren einer gegebenen Situation durch Integration von Lerninhalten aus verschiedenen Bereichen

Spezifische Kompetenzen

- 1.1 Identifizieren von Zahlen, die zu verschiedenen Teilmengen von \mathbb{R} gehören
- 1.2 Identifizieren einer gegebenen Situation, die durch lineare Gleichungen oder Gleichungssysteme gelöst werden kann
- 1.3 Identifizieren von Informationen aus Tabellen, Grafiken und Diagrammen
- 1.4 Identifizieren bestimmter Vierecke in gegebenen geometrischen Konfiguration
- 1.5 Identifizieren der Elemente des Kreises und/oder regelmäßiger Vielecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 1.6 Identifizieren der ähnlichen Dreiecke in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 1.7 Erkennen der Elemente eines rechtwinkligen Dreiecks in einer gegebenen geometrischen Konfiguration
- 2.1 Anwenden von Rechenregeln zum Schätzen und Approximieren von reellen Zahlen
- 2.2 Anwenden der Rechenregeln mit reellen Zahlen zur Überprüfung der Lösungen von linearen Gleichungen oder Gleichungssystemen
- 2.3 Verarbeiten von Daten in Form von Tabellen, Diagrammen oder Schaubildern, um sie zu erfassen, darzustellen und zu präsentieren
- 2.4 Beschreiben von Vierecken anhand ihrer Definitionen und Eigenschaften in gegebenen geometrischen Konfigurationen
- 2.5 Beschreiben der Eigenschaften eines Kreises und von regelmäßigen Vielecken, die einem Kreis einbeschrieben sind
- 2.6 Feststellen der Ähnlichkeit von Dreiecken
- 2.7 Anwenden der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck zur Bestimmung seiner Elemente
- 3.1 Verwenden der Algorithmen und Eigenschaften der Rechenoperationen in der Menge der reellen Zahlen
- 3.2 Verwenden der Äquivalenzumformungen zur Lösung linearer Gleichungen und Gleichungssysteme
- 3.3 Auswahl der geeigneten Methode zur Darstellung von Aufgaben mit funktionalen Abhängigkeiten und deren Darstellungen
- 3.4 Verwenden der Eigenschaften der Vierecke zur Lösung von Aufgaben
- 3.5 Verwenden der Kreiseigenschaften beim Lösen von Aufgaben
- 3.6 Verwenden der Ähnlichkeit von Dreiecken in gegebenen geometrischen Konfigurationen, um Längen, Maße und Flächeninhalte zu bestimmen
- 3.7 Ableiten der metrischen Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck
- 4.1 Verwenden der Terminologie der reellen Zahlen (Vorzeichen, Absolutbetrag, entgegengesetzte Zahl, Kehrwert)
- 4.2 Aufstellen der Gleichungen und lineare Gleichungssysteme
- 4.3 Beschreiben der Elemente der Datenverarbeitung in mathematischer Sprache
- 4.4 Ausdrücken der Begriffe bezüglich der Vierecke in geometrischer Sprache
- 4.5 Eigenschaften von Kreisen und Vielecken in mathematischer Sprache ausdrücken
- 4.6 Eigenschaften geometrischer Figuren in mathematischer Sprache mithilfe der Ähnlichkeit ausdrücken
- 4.7 Die Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks in mathematischer Sprache ausdrücken
- 5.1 Entwickeln der Strategien zur Lösung von Aufgaben mit reellen Zahlen
- 5.2 Erarbeiten von Methoden zur Lösung von Gleichungen oder linearen Gleichungssystemen
- 5.3 Analyse der Praxissituationen mithilfe der Elemente der Datenverarbeitung
- 5.4 Auswahl geeigneter geometrischer Darstellungen, um die Berechnung von Streckenlängen, Winkelmaßen und Flächeninhalten zu optimieren
- 5.5 Interpretieren der Eigenschaften des Kreises und der regelmäßigen Vielecke anhand geometrischer Darstellungen
- 5.6 Interpretieren der Ähnlichkeit von Dreiecken in geometrischen Konfigurationen
- 5.7 Interpretieren der metrischen Beziehungen zwischen den Elementen eines rechtwinkligen Dreiecks
- 6.1 Mathematische Modellierung von praktischen Situationen bei den Operationen mit reellen Zahlen
- 6.2 Mathematische Umsetzung von gegebenen Situationen mithilfe von Gleichungen und/oder linearen Gleichungssystemen
- 6.3 Umsetzen einer gegebenen Situation in eine geeignete Darstellung (Text, Formel, Diagramm, Grafik)
- 6.4 Modellierung gegebener Situationen durch geometrische Darstellungen mit Vierecken
- 6.5 Mathematische Modellierung praktischer Situationen mit regelmäßigen Vielecken oder Kreisen
- 6.6 Anwenden einer Strategie zur Lösung von gegebenen Situationen unter Verwendung der Ähnlichkeit von Dreiecken
- 6.7 Anwenden einer Strategie zur Lösung gegebener Situationen unter Verwendung metrischer Beziehungen in einem rechtwinkligen Dreieck

E1

Die Menge der reellen Zahlen

1. Lektion

Die Quadratwurzel einer Quadratzahl.
Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

2. Lektion

Die Menge der reellen Zahlen

3. Lektion

Rechenregeln für Quadratwurzeln

4. Lektion

Addition und Subtraktion der reellen Zahlen

5. Lektion

Multiplikation und Division der reellen Zahlen

6. Lektion

Die Potenz einer reellen Zahl mit ganzem Exponenten.
Die Reihenfolge der Rechenoperationen mit reellen Zahlen

7. Lektion

Rationalisieren des Nenners eines Bruchs

8. Lektion

Der gewichtete Mittelwert zweier oder mehrerer reeller Zahlen.
Das geometrische Mittel zweier positiver reeller Zahlen

9. Lektion

Die Gleichung der Form $x^2 = a$, wobei $a \in \mathbb{R}$

Wiederholung und Bewertung

Die meisten Zahlen, die wir täglich verwenden, sind reelle Zahlen. Dazu gehören der Geldbetrag in unserem Portemonnaie, die Statistiken, die wir in Sportsendungen sehen, die Mengenangaben in Kochbüchern. Wir verwenden reelle Zahlen, um Windgeschwindigkeiten, Niederschlagsmengen, Entfernungen, aber auch die Menge des Benzins im Tank oder unsere Herzfrequenz anzugeben.



1. Lektion: Die Quadratwurzel einer Quadratzahl. Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Schlüsselwörter

Quadratzahl

Quadratwurzel

Wurzel

Die Quadratwurzel einer Quadratzahl

Mathe im Alltag

Das Grundstück in der Abbildung ist quadratisch und hat einen Flächeninhalt von $6\,400\text{ m}^2$.

Wie lang ist die Seite des Grundstücks?

Der Flächeninhalt eines Quadrats ist gleich dem Quadrat seiner Seitenlänge.

Wenn l die Seitenlänge des Grundstücks in Metern ist, beträgt der Flächeninhalt des Grundstücks l^2 Quadratmeter.

Also: $l^2 = 6\,400$. Da $80^2 = 6\,400$, erhalten wir $l = 80\text{ m}$.



Was stellen wir fest?

In einigen praktischen Situationen ist es notwendig, eine natürliche Zahl n zu bestimmen, wenn man das Quadrat von n kennt. Dieser Vorgang wird *Quadratwurzelziehen* von n^2 bezeichnet.

Eine natürliche Zahl, die das Quadrat (die zweite Potenz) einer anderen natürlichen Zahl ist, nennt man *Quadratzahl*.

Merke dir!

Sei a eine Quadratzahl. Wir nennen *Quadratwurzel der Zahl* die natürliche Zahl n , sodass $n^2 = a$ ist.

Die Zahl n wird mit \sqrt{a} bezeichnet und als *Quadratwurzel* oder *Wurzel aus a* gelesen. Man kann also schreiben:

$$\sqrt{a} = n, \text{ wenn und nur wenn } n^2 = a.$$

Beispiele

- $\sqrt{0} = 0$, weil $0^2 = 0$;
- $\sqrt{25} = 5$, weil $5^2 = 25$;
- $\sqrt{121} = 11$, weil $11^2 = 121$;
- $\sqrt{729} = 27$, weil $27^2 = 729$;
- $\sqrt{1024} = 32$, weil $32^2 = 1\,024$;
- $\sqrt{7225} = 85$, weil $85^2 = 7\,225$.

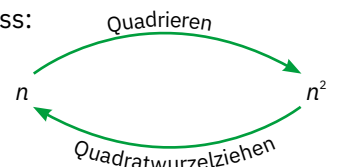
Bemerkung

Die Verbindung zwischen Quadrieren (zur zweiten Potenz erheben) und Quadratwurzelziehen

Aus der Definition der Quadratwurzel einer Quadratzahl ergibt sich unmittelbar, dass:

- $\sqrt{n^2} = n$ für jede natürliche Zahl n ;
- $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede Quadratzahl a .

Mit anderen Worten, Quadrieren und Quadratwurzelziehen sind umgekehrte Operationen.



Beispiele

- $\sqrt{7^2} = 7$, weil $\sqrt{7^2} = \sqrt{49} = 7$;
- $(\sqrt{16})^2 = 16$, weil $(\sqrt{16})^2 = 4^2 = 16$;
- $\sqrt{5^2} = 5$, weil $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$;
- $(\sqrt{81})^2 = 81$, weil $(\sqrt{81})^2 = 9^2 = 81$.

Die Quadratwurzel des Quadrats einer positiven rationalen Zahl

Im vorigen Abschnitt haben wir gesehen, dass, wenn eine natürliche Zahl a als Quadrat einer anderen natürlichen Zahl n geschrieben werden kann, dann wird a Quadratzahl und n Quadratwurzel (oder Wurzel) von a genannt. Wir erweitern diese Definition auf Quadrate positiver rationaler Zahlen.

Gruppenarbeit

1. Schreibt ab und ergänzt in Zweiergruppen die Tabelle:

x	0,7	1,2	1,3	1,4	1,5	4,5	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{9}{13}$	$\frac{11}{101}$
x^2	0,49					20,25		$\frac{49}{25}$		

2. Übertragt folgende Tabelle in eure Hefte, überprüft die Richtigkeit der Angaben und bestimmt durch Versuche die Werte der positiven rationalen Zahlen x , die in die zweite Zeile der Tabelle zu schreiben sind, sodass x^2 und x in der angegebenen Beziehung stehen:

x^2	0,01	1,69	1,96	2,25	8,41	30,25	$\frac{4}{9}$	$\frac{49}{25}$	$\frac{169}{81}$	$\frac{256}{625}$
x	0,1				2,9		$\frac{2}{3}$			

3. Vergleicht die Ergebnisse der ersten und zweiten Tabelle mit den anderen Arbeitsgruppen und analysiert die Zusammenhänge zwischen den Daten in den beiden Tabellen.

Merke dir!

Sei a eine positive rationale Zahl, die als Quadrat einer rationalen Zahl geschrieben werden kann.

Die positive rationale Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = a$ wird als *Quadratwurzel* der rationalen Zahl a bezeichnet.

Wie zuvor wird x mit \sqrt{a} bezeichnet und *Quadratwurzel der Zahl a* gelesen. Wenn also die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl ist, kann sie geschrieben werden:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x > 0.$$

Da $\sqrt{0} = 0$ ist, wird die obige Beziehung allgemeiner für $a \geq 0$ wie folgt geschrieben:

$$\sqrt{a} = x, \text{ wenn und nur wenn } x^2 = a \text{ und } x \geq 0.$$

Beispiele

1. $\sqrt{0,04} = 0,2$, weil $(0,2)^2 = 0,04$;

2. $\sqrt{11,56} = 3,4$, weil $3,4^2 = 11,56$;

3. $\sqrt{\frac{9}{49}} = \frac{3}{7}$, weil $\left(\frac{3}{7}\right)^2 = \frac{9}{49}$;

4. $\sqrt{\frac{121}{729}} = \frac{11}{27}$, weil $\left(\frac{11}{27}\right)^2 = \frac{121}{729}$.

Bemerkungen

1. Wenn die rationale Zahl $a > 0$ das Quadrat einer rationalen Zahl x ist, dann ist $a = x^2 = (-x)^2$.

Beispiele: a. $\frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2$;

b. $5,76 = (2,4)^2 = (-2,4)^2$.

Die obige Definition zeigt, dass die Quadratwurzel der Zahl a eine positive Zahl ist. Deshalb:

a. $\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$ und $\sqrt{\frac{1}{4}} \neq -\frac{1}{2}$;

b. $\sqrt{5,76} = 2,4$ und $\sqrt{5,76} \neq -2,4$.

2. Der Zusammenhang zwischen der Quadrierungsoperation und dem Ziehen der Quadratwurzel gilt für rationale Zahlen, sofern die obige Positivitätsbedingung erfüllt ist. Da der Absolutbetrag einer rationalen Zahl nicht negativ ist und $|-x| = |x|$, folgt aus der Definition der Quadratwurzel für jede rationale Zahl x , dass:

a. $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$, die das Quadrat einer rationalen Zahl ist;

b. $\sqrt{x^2} = |x|$ für jede rationale Zahl x .



Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl



Mathe im Alltag

Vier identische Sperrholzstücke in Form rechtwinkliger gleichschenkliger Dreiecke mit einer Kathetenlänge von 1 dm werden benötigt, um ein Modellflugzeug wie in der nebenstehenden Abbildung zu bauen.



Es gibt zwei Möglichkeiten, die Bestandteile zu erhalten:

- Wir zeichnen ein Rechteck mit den Dimensionen 1 dm und 2 dm auf die Sperrholzplatte, teilen es in zwei Quadrate der Seitenlänge von je 1 dm und machen dann zwei Schnitte entlang der Diagonalen dieser Quadrate wie in Abbildung 1, um die vier Teile zu erhalten.

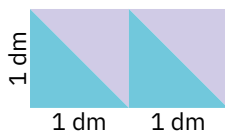


Abbildung 1

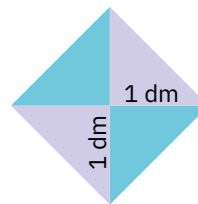


Abbildung 2

- Wir beachten, dass die Teile so angeordnet werden können, dass sie ein Quadrat bilden (Abbildung 2). Wir machen uns daran, die Seitenlänge dieses Quadrats zu bestimmen, damit wir beim Ausschneiden aus einem anderen Stück Sperrholz kein Material verschwenden.

Da die Quadrate in den Abbildungen 1 und 2 den gleichen Flächeninhalt von 2 dm^2 haben, ist die Seitenlänge des Quadrats die positive Zahl x mit der Eigenschaft, dass $x^2 = 2$ ist. Da es keine rationale Zahl gibt, deren Quadrat gleich 2 ist, suchen wir eine Annäherung an diese Zahl.

Da $1^2 < 2 < 2^2$ ist, folgt daraus, dass x zwischen 1 und 2 liegen muss.

Da $1,4^2 = 1,96$ und $1,5^2 = 2,25$, bedeutet dies, dass $1,4 < x < 1,5$. Genauer gesagt, $1,41 < x < 1,42$, weil $1,41^2 = 1,9881 < 2$ und $1,42^2 = 2,0164 < 2$.

Was stellen wir fest?

Die oben beschriebene praktische Situation zeigt, dass es eine positive Zahl x mit der Eigenschaft $x^2 = 2$ gibt, deren Wert, auch wenn er nicht genau angegeben werden kann, auf eine ganze Zahl oder auf einen Dezimalbruch mit einer, zwei oder mehreren Dezimalstellen angenähert werden kann.

In ähnlicher Weise kann man zeigen, dass es für jede positive rationale Zahl a eine positive Zahl x gibt, deren Quadrat a ist.

Somit erstreckt sich der Begriff der Quadratwurzel auf alle positiven rationalen Zahlen.



Merke dir!

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl a ist eine positive Zahl x , die die Eigenschaft $x^2 = a$ hat.

Wie zuvor bezeichnen wir $x = \sqrt{a}$ und sagen, dass x die *Quadratwurzel* der Zahl a (oder *Wurzel aus a*) ist. Die Beziehungen gelten auch hier:

- $\sqrt{a} = x$, wenn und nur wenn $x^2 = a$;
- $(\sqrt{a})^2 = a$ für jede rationale Zahl $a \geq 0$;
- $\sqrt{a^2} = |a|$ für jede rationale Zahl a .



Beispiele

In der vorigen praktischen Aufgabe bestätigt die Länge x der Seite des Quadrats die Beziehung $x^2 = 2$, also ist, laut Definition, $x = \sqrt{2}$.

Auch andere praktische Aufgaben führen zu der Schlussfolgerung, dass es positive Zahlen der Form $\sqrt{3}$, $\sqrt{3,14}$ oder $\sqrt{\frac{5}{12}}$ gibt.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl

Eine Menge *zu schätzen*, bedeutet, einen ungefähren Wert anzugeben, ohne alle erforderlichen Daten zu kennen, um eine genaue Antwort zu formulieren. Um eine Zahl der Form \sqrt{a} in der Praxis verwenden zu können, wobei a eine positive rationale Zahl ist, werden wir Annäherungen an ganze Zahlen oder an endliche Dezimalbrüche verwenden, indem wir die rationale Zahl a zwischen den Quadraten zweier rationaler Zahlen einschließen.

Schätzen der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl durch Einschließen der Zahl zwischen Quadrate rationaler Zahlen

Nehmen wir zum Beispiel die rationale Zahl 5,61. Wir schließen diese Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen ein: $2^2 < 5,61 < 3^2$, woraus folgt, dass $2 < \sqrt{5,61} < 3$.

Daher ist die Abrundung von $\sqrt{5,61}$ an die Ordnung der Einer gleich 2, und die Aufrundung 3.

Zur Bestimmung von Näherungswerten von $\sqrt{5,61}$ an die Ordnung der Zehntel und der Hundertstel gehen wir wie folgt vor:

Schritt 1: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $2,\overline{a}$, wobei $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Wir erhalten $2,3^2 < 5,61 < 2,4^2$, also $\sqrt{5,61} \approx 2,3\dots$

Schritt 2: Wir berechnen die Quadrate der Zahlen der Form $2,\overline{3a}$, wobei $a \in \{1, 2, \dots, 9\}$.

Wir erhalten $2,36^2 < 5,61 < 2,37^2$, woraus sich ergibt, dass $\sqrt{5,61} \approx 2,36\dots$

Wenn man so weitermacht, kann man Näherungswerte für eine beliebige Anzahl von Dezimalstellen erhalten.

Schätzen der Quadratwurzel mithilfe eines Taschenrechners

Die Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl wird mithilfe des Taschenrechners (oder der Handy- oder Tablet-Apps) ermittelt, indem die Zahl in Dezimalform in den Rechner eingegeben und dann die Taste mit dem *Wurzelzeichen* gedrückt wird.

Zum Beispiel wird der ungefähre Wert von $\sqrt{2}$ ermittelt, indem die Tasten der Reihe nach gedrückt werden:



Wenn die rationale Zahl als gemeiner Bruch angegeben ist, verwenden wir die Divisionstaste, um die Zahl in die Dezimalform zu bringen, und drücken dann die Wurzeltaste.



Portfolio

Untersucht das digitale Lehrbuch (in rumänischer Sprache), um Folgendes zu studieren:

- die babylonische Methode zur Bestimmung des ungefähren Werts der Quadratwurzel einer positiven rationalen Zahl;
- den Algorithmus zum Ziehen der Quadratwurzel aus einer positiven rationalen Zahl, die durch einen endlichen Dezimalbruch ausgedrückt wird. Berechnet mithilfe des Algorithmus zum Quadratwurzelziehen die Quadratwurzel einer natürlichen Zahl, die keine Quadratzahl ist, auf zwei Dezimalstellen genau.

Bemerkung

Tabelle der Quadratwurzelwerte der natürlichen Zahlen zwischen 1 und 25

$\sqrt{1} = 1$	$\sqrt{6} = 2,4494\dots$	$\sqrt{11} = 3,3166\dots$	$\sqrt{16} = 4$	$\sqrt{21} = 4,5825\dots$
$\sqrt{2} = 1,4142\dots$	$\sqrt{7} = 2,6457\dots$	$\sqrt{12} = 3,4641\dots$	$\sqrt{17} = 4,1231\dots$	$\sqrt{22} = 4,6904\dots$
$\sqrt{3} = 1,7320\dots$	$\sqrt{8} = 2,8284\dots$	$\sqrt{13} = 3,6055\dots$	$\sqrt{18} = 4,2426\dots$	$\sqrt{23} = 4,7958\dots$
$\sqrt{4} = 2$	$\sqrt{9} = 3$	$\sqrt{14} = 3,7416\dots$	$\sqrt{19} = 4,3588\dots$	$\sqrt{24} = 4,8989\dots$
$\sqrt{5} = 2,2360\dots$	$\sqrt{10} = 3,1622\dots$	$\sqrt{15} = 3,8729\dots$	$\sqrt{20} = 4,4721\dots$	$\sqrt{25} = 5$





Untersuchung

An der Tafel stehen die Zahlen $a = 7,84$ und $b = 1,44$. Löst die Aufgaben und überprüft die Richtigkeit eurer Antworten, indem ihr sie mit euren Mitschülern und anschließend mit eurem Lehrer besprecht. Schreibt die richtigen Schlussfolgerungen in euer persönliches Portfolio.

1. Berechnet die folgenden Zahlen auf zwei Dezimalstellen genau, eventuell mit einem Taschenrechner:

$$\sqrt{a+b}, \sqrt{a}+\sqrt{b}, \sqrt{a-b}, \sqrt{a}-\sqrt{b}, \sqrt{a \cdot b}, \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ und } \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}.$$

2. Entscheidet, welche der Zahlen $\sqrt{a+b}$ und $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ größer ist. Macht dasselbe für $\sqrt{a-b}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, danach für $\sqrt{a \cdot b}$ und $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$, und dann für $\sqrt{\frac{a}{b}}$ und $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

3. Wiederholt die Anforderungen für die Arbeitsaufgaben 1 und 2, wenn $a = \frac{225}{256}$ und $b = \frac{4}{25}$.

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechnet dann \sqrt{a} :

a. $a = 25 \cdot 13 + 25 \cdot 20 - 25 \cdot 17$; b. $a = 12 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24)$; c. $a = 14^{60}$; d. $a = 3^{24} \cdot 7^{12}$.

Lösung:

a. $a = 25 \cdot 13 + 25 \cdot 20 - 25 \cdot 17 = 25 \cdot (13 + 20 - 17) = 25 \cdot 16 = 5^2 \cdot 4^2 = (5 \cdot 4)^2 = 20^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{20^2} = 20$.

b. $a = 12 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 24) = 12 \cdot \frac{24 \cdot 25}{2} = 12 \cdot \frac{24}{2} \cdot 25 = 12 \cdot 12 \cdot 25 = 12^2 \cdot 5^2 = (12 \cdot 5)^2 = 60^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{60^2} = 60$.

c. $a = 14^{60} = 14^{30 \cdot 2} = (14^{30})^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{(14^{30})^2} = 14^{30}$.

d. $a = 3^{24} \cdot 7^{12} = (3^{12})^2 \cdot (7^6)^2 = (3^{12} \cdot 7^6)^2$, also ist a eine Quadratzahl. Wir erhalten dann $\sqrt{a} = \sqrt{(3^{12} \cdot 7^6)^2} = 3^{12} \cdot 7^6$.

2. Berechnet:

a. $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{100} : \sqrt{25} + \sqrt{25 \cdot 81}$; b. $\sqrt{4^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 5^2 - 4^3}$.

Lösung:

a. Wir berechnen zuerst die Quadratwurzeln, dann beachten wir die Reihenfolge der Operationen mit rationalen Zahlen: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{9} + \sqrt{100} : \sqrt{25} + \sqrt{25 \cdot 81} = 4 \cdot 3 + 10 : 5 + \sqrt{25 \cdot 9} = 12 + 2 + \sqrt{5^2 \cdot 3^2} = 14 + \sqrt{15^2} = 14 + 15 = 29$.

b. $\sqrt{4^2 \cdot 15 + 4^2 \cdot 5^2 - 4^3} = \sqrt{4^2 \cdot (15 + 5^2 - 4)} = \sqrt{4^2 \cdot 36} = \sqrt{4^2 \cdot 6^2} = \sqrt{24^2} = 24$.

Vorgeschlagene Aufgaben



1. Welche der folgenden Zahlen ist eine Quadratzahl?
a. 9; b. 24; c. 63; d. 81; e. 196; f. 144; g. 336; h. 400; i. 625.
2. Schreibt die Quadratzahlen zwischen 10 und 150.
3. Übertrag ins Heft und füllt dann die Tabelle aus:

x	3	7	9		15		23		
x^2		49		100		400		625	900

4. Entscheidet, ob die folgende Gleichungen wahr oder falsch sind:
a. $\sqrt{4} = 2$; b. $\sqrt{5} = 25$; c. $\sqrt{225} = 15$; d. $\sqrt{100} = 50$; e. $\sqrt{64} = 4$; f. $\sqrt{144} = 12$.
5. Berechnet:
a. $\sqrt{25}$; b. $\sqrt{81}$; c. $\sqrt{1}$; d. $\sqrt{400}$; e. $\sqrt{576}$; f. $\sqrt{900}$.
6. Berechnet:
a. $\sqrt{4} + \sqrt{36}$; b. $\sqrt{49} - \sqrt{9}$; c. $\sqrt{1} + \sqrt{0} + \sqrt{16}$; d. $\sqrt{100} \cdot \sqrt{9} - \sqrt{25} : 5$.

7. Berechnet, eventuell mit dem Taschenrechner:

a. $\sqrt{441} + \sqrt{961}$; b. $\sqrt{4096} - \sqrt{1225}$; c. $\sqrt{2209} + 2 \cdot \sqrt{1369}$; d. $(\sqrt{17424} - \sqrt{1024}) : \sqrt{4}$.

8. Berechnet:

a. $\sqrt{3^2}$; b. $\sqrt{14^2}$; c. $\sqrt{45^2}$; d. $\sqrt{5^4}$; e. $\sqrt{8^6}$; f. $\sqrt{2^8}$; g. $\sqrt{3^{10}}$.

9. Berechnet:

a. $\sqrt{5^2 - 3^2} + \sqrt{3^2 + 4^2}$; b. $\sqrt{9^2 + 12^2} - \sqrt{3 \cdot 12}$; c. $\sqrt{25^2 - 20^2} : 3 + 2 \cdot \sqrt{121}$.

10. Berechnet:

a. $(\sqrt{196} - \sqrt{169}) \cdot \sqrt{100} + \sqrt{225}$; b. $(\sqrt{400} - \sqrt{144}) : 4 + \sqrt{196} : 7$;
c. $\sqrt{3 + \sqrt{36}} + \sqrt{16 - \sqrt{49}}$; d. $\sqrt{6 \cdot \sqrt{36}} + \sqrt{9 \cdot \sqrt{81}} - \sqrt{20 \cdot \sqrt{25}}$.

11. Zeigt, dass a eine Quadratzahl ist, und berechne dann \sqrt{a} :

a. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11$; b. $(1 + 2 + 3 + \dots + 17) : 17$; c. $a = 41 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 81)$.

12. Führt aus:

a. $\sqrt{2^2 \cdot 5 + 2^2 \cdot 4}$; b. $\sqrt{3^2 \cdot 15 + 3^2 \cdot 14 - 3^2 \cdot 4}$; c. $\sqrt{10^2 \cdot 81 + 10^2 \cdot 18 + 10^2}$;
d. $\sqrt{2^4 \cdot 3^2 + 2^4 \cdot 11 + 2^4 \cdot 5}$; e. $\sqrt{5^4 \cdot 20 - 5^4 \cdot 16 + 5^5}$; f. $\sqrt{6^4 \cdot 13 + 6^4 \cdot 5^2 - 6^4 \cdot 2}$.

13. Berechne x anhand der folgenden Beziehungen:

a. $\frac{x}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{16}}$; b. $\frac{\sqrt{25}}{x} = \frac{\sqrt{100}}{\sqrt{144}}$; c. $\frac{2 \cdot \sqrt{121}}{x} = \frac{\sqrt{49} - \sqrt{9}}{\sqrt{64}}$; d. $\frac{\sqrt{2 + \sqrt{196}}}{x} = \frac{\sqrt{6^2 + 8^2}}{\sqrt{5 + \sqrt{400}}}$.

14. Führt aus:

a. $\sqrt{3^2 \cdot 6^2}$; b. $\sqrt{8^2 \cdot 5^2 \cdot 2^2}$; c. $\sqrt{3^4 \cdot 5^4}$; d. $\sqrt{5^{20} \cdot 6^{20}}$; e. $\sqrt{2^8 \cdot 3^{10}}$; f. $\sqrt{7^{16} \cdot 10^{28}}$.

15. Verwendet eventuell den Taschenrechner und berechne:

a. $(\sqrt{15129} + \sqrt{2116}) : \sqrt{169} - (\sqrt{13225} + \sqrt{841}) : \sqrt{144}$;
b. $(3 \cdot \sqrt{91809} + \sqrt{8281}) : (\sqrt{32400} + 2 \cdot \sqrt{25600}) : (\sqrt{168100} - \sqrt{166464})$.

16. Ordnet jeder Quadratwurzel in der ersten Zeile den entsprechenden Wert in der zweiten Zeile zu:

a. $\sqrt{\frac{64}{49}}$	b. $\sqrt{3 \frac{1}{16}}$	c. $\sqrt{\frac{441}{169}}$	d. $\sqrt{\frac{529}{144}}$	e. $\sqrt{\frac{1024}{361}}$	f. $\sqrt{\frac{1}{676}}$		
A. $\frac{23}{12}$	B. $\frac{8}{7}$	C. $\frac{21}{13}$	D. $\frac{32}{19}$	E. $\frac{3}{4}$	F. $\frac{1}{24}$	G. $\frac{1}{26}$	H. $\frac{7}{4}$

17. Berechne:

a. $\sqrt{0,04}$; b. $\sqrt{0,36}$; c. $\sqrt{0,0001}$; d. $\sqrt{2,56}$; e. $\sqrt{1,44}$; f. $\sqrt{10,24}$.

18. Führt aus:

a. $\sqrt{144 \cdot 36}$; b. $\sqrt{\frac{1,44}{25}}$; c. $\sqrt{4 \cdot 0,36}$; d. $\sqrt{0,04 \cdot 0,49}$; e. $\sqrt{\frac{1,69}{4}}$; f. $\sqrt{\frac{1}{2,56}}$.

Test

1. Berechne:

a. $\sqrt{16}$; b. $\sqrt{3,24}$; c. $\sqrt{25} + \sqrt{49} - \sqrt{36}$; d. $\sqrt{6^2 + 8^2} : \sqrt{4 \cdot 5^2}$. (3 Pkte.)

2. Wählt die richtige Antwort aus. Das Ergebnis der Rechnung

$$\sqrt{5 \cdot \sqrt{144} + 4 \cdot \sqrt{400} + \sqrt{16}} : \sqrt{3^3 - 5^2 + 2} - \sqrt{8 + \sqrt{49} + 7 \cdot \sqrt{9}}$$
 ist:

a. 0; b. 1; c. 2; d. 3. (3 Pkte.)

3. Berechne \sqrt{a} , wobei:

a. $a = 2^4 \cdot 3^4 \cdot 5^4$; b. $a = 17 \cdot (1 + 2 + 3 + \dots + 17)$; c. $a = 6^4 \cdot 47 + 6^4 \cdot 11 + 6^5$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.

2. Lektion: Die Menge der reellen Zahlen

Schlüsselwörter

natürliche Zahl	irrationale Zahl	Zahlenachse	ganze Zahl	reelle Zahl
Absolutbetrag einer reellen Zahl	rationale Zahl	$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$	Gegenzahl (entgegengesetzte Zahl) einer reellen Zahl	

Irrationale Zahlen. Die Menge der reellen Zahlen

Problemstellung

Wie wir in Lektion 1 gesehen haben, hat das Quadrat in Abbildung 1 die Seitenlänge $\sqrt{2}$. Was für eine Zahl ist $\sqrt{2}$?

Mit einem Taschenrechner erhalten wir einen Näherungswert mit 8 Dezimalstellen:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135\dots$$

Der Bildschirm eines Taschenrechners kann bis zu 8 Stellen anzeigen. In diesem Fall könnt ihr eine Handy-App verwenden, um 15 Dezimalstellen zu erhalten:

$$\sqrt{2} \approx 1,414213562373095\dots$$

Mithilfe einer Computeranwendung, die als wissenschaftlicher Taschenrechner bezeichnet wird, finden wir:

$$\sqrt{2} \approx 1,4142135623730950488016887242097\dots$$

Die bisher erhaltenen Dezimalzahlen wiederholen sich nicht periodisch, und rationale Zahlen können als endliche oder periodische Dezimalbrüche geschrieben werden. Was für eine Zahl ist also $\sqrt{2}$?

Was stellen wir fest?

Die vorgenommenen Annäherungen zeigen, dass es *Zahlen gibt*, die als nichtperiodische Dezimalbrüche ausgedrückt werden (bei denen sich die Dezimalstellen nicht periodisch wiederholen). Mit anderen Worten, diese Zahlen sind weder endliche Dezimalbrüche noch periodische (einfache oder gemischte) Dezimalbrüche, sie sind also keine rationalen Zahlen.

Geschichte der Mathematik

Obwohl wir oben mit verschiedenen Methoden eine ausreichend große Anzahl von Dezimalstellen für die Zahl $\sqrt{2}$ ermittelt haben, haben wir nur eine *endliche* Anzahl von Dezimalstellen untersucht. Nur auf der Grundlage dieser Computerschätzungen können wir nicht entscheiden, ob $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl ist oder nicht.

In seinem Buch *Die Elemente* bewies Euklid (geb. ca. 325 v. Chr.), dass:

$$\sqrt{2} \text{ keine rationale Zahl ist.}$$

Wenn man mithilfe der Methode der Zurückführung auf einen Widerspruch annimmt, dass $\sqrt{2}$ eine rationale Zahl wäre, gäbe es die von null verschiedenen, teilerfremden natürlichen Zahlen (relative Primzahlen) p und q , sodass $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$, oder, äquivalent, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$.

Daraus folgt, dass $p^2 = 2q^2$, also p durch 2 teilbar ist. Wenn $p = 2s$, dann ist $4s^2 = 2q^2$, d. h., $q^2 = 2s^2$, also ist auch q durch 2 teilbar. Wir erhalten, dass die Zahlen p und q den gemeinsamen Teiler 2 haben, was im Widerspruch zu der Tatsache steht, dass p und q teilerfremd sind. Diese Annahme ist falsch, sodass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist.

Da es sich also nicht um eine rationale Zahl handelt, wird $\sqrt{2}$ als unendlicher, nichtperiodischer Dezimalbruch geschrieben.

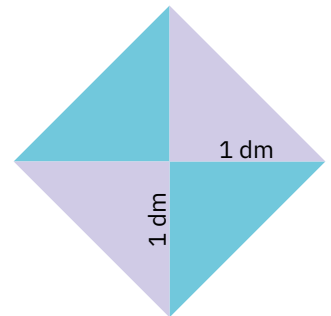
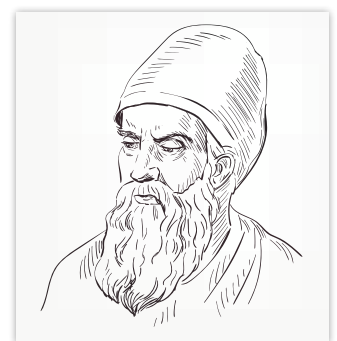


Abbildung 1



Euklid

Merke dir!

Zahlen, die als unendliche, nichtperiodische Dezimalbrüche geschrieben werden können, werden als irrationale Zahlen bezeichnet. Also sind $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ irrationale Zahlen.

Allgemeiner ausgedrückt: Wenn die natürliche Zahl n keine Quadratzahl ist, dann ist \sqrt{n} irrational.

Wenn x eine positive irrationale Zahl ist, dann ist \sqrt{x} irrational. Folglich können wir über die Wurzel aus einer positiven reellen Zahl sprechen.

Beispiele

1. Das Verhältnis zwischen der Länge des Kreises und seinem Durchmesser ist eine irrationale Zahl, die mit dem griechischen Buchstaben π (ρi) bezeichnet wird. Der ungefähre Wert ist $\pi = 3,1415926535\dots$
2. Der Goldene Schnitt, der mit dem griechischen Buchstaben φ (phi) bezeichnet wird, ist die erste irrationale Zahl, die in der Geschichte der Mathematik entdeckt und definiert wurde. Der ungefähre Wert ist $1,6180339887\dots$. Der Goldene Schnitt wurde von Euklid entdeckt. Er teilte eine Strecke in zwei Teile, die er als „Mittelwert“ und „extremes Verhältnis“ bezeichnete, sodass das Verhältnis φ zwischen der Länge der ursprünglichen Strecke und der Länge der längeren Strecke gleich dem Verhältnis der Länge der längeren Strecke zur Länge der kürzeren Strecke ist:

$$\varphi = \frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$$

Gegenwärtige Studien zeigen, dass die goldene Zahl in den Proportionen des menschlichen Körpers, bei vielen Tieren und Pflanzen, in der Struktur der DNA und im Aufbau des Sonnensystems, in der Kunst (Malerei, Musik, Bildhauerei) und Architektur, aber auch in den Wachstumsraten der Bevölkerung und an der Börse auftaucht.

3. Die Zahl $A = 1,010010001000010000010\dots$, bei der sich die Anzahl der 0-Stellen nach jeder 1 um eins erhöht, ist eine irrationale Zahl.

Wäre A ein periodischer Dezimalbruch mit einer Periode von n Ziffern, so müsste unter den n Ziffern zwangsläufig die Ziffer 1 sein, da die Periode nicht nur die Ziffer 0 enthalten kann. Folglich müsste sich unter den n Dezimalstellen von A mindestens eine 1 befinden. Aber unmittelbar nach der n -ten Ziffer 1 von A folgt $n + 1$ -mal die Ziffer 0, also ist A irrational.

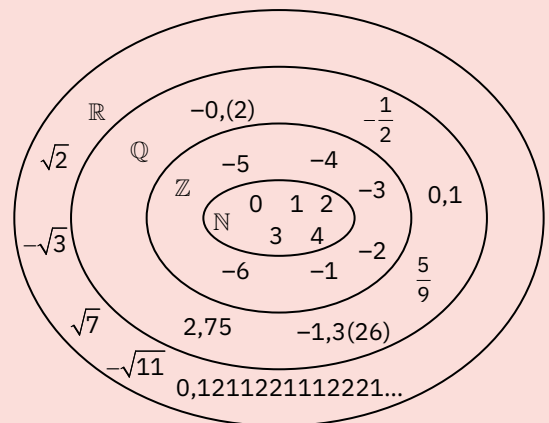
Merke dir!

Die Menge der reellen Zahlen, bezeichnet mit \mathbb{R} , ist die Vereinigung der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen.

Da die Menge der reellen Zahlen die Menge der rationalen Zahlen enthält, ist $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus ergibt sich die Folge der Einschlüsse $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Daraus folgt $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Also, $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$.



Darstellung der reellen Zahlen auf der Zahlenachse

Mathe im Alltag

Wir wollen zwei Quadrate aus Papier mit einem Flächeneinhalt von 2 cm^2 bzw. 3 cm^2 anfertigen.

Die Seiten der beiden Quadrate haben eine Länge von $\sqrt{2} \text{ cm}$ bzw. $\sqrt{3} \text{ cm}$, also müssen wir Strecken mit diesen Abmessungen konstruieren.

Wir betrachten zuerst ihre Näherungswerte: $\sqrt{2} = 1,414\dots$, $\sqrt{3} = 1,732\dots$

Wir tragen diese Näherungswerte auf der Zahlenachse ein, wobei wir die Maßeinheit auf 1 cm setzen, und erhalten auf der Achse die Punkte A und B (Abbildung 2). Die Strecken OA und OB haben eine Länge von etwa $\sqrt{2} \text{ cm}$ bzw. $\sqrt{3} \text{ cm}$.

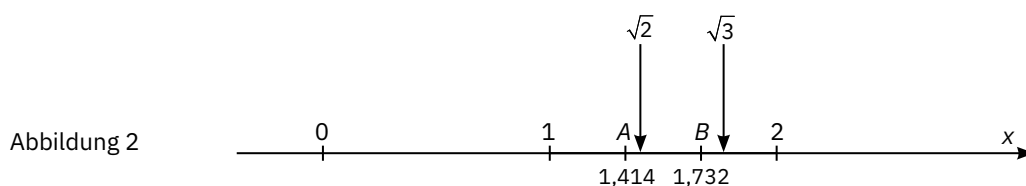


Abbildung 2

Was stellen wir fest?

Eine irrationale Zahl wird durch einen Punkt auf der Zahlenachse dargestellt. Die Lage dieses Punktes kann mithilfe einer hinreichend genauen rationalen Näherung der irrationalen Zahl geschätzt werden.



Merke dir!

Eine Gerade, auf der ein Punkt liegt, der als *Ursprung* bezeichnet wird, eine von links nach rechts verlaufende Richtung, die durch einen Pfeil angezeigt wird und als *positiver Richtungssinn* bezeichnet wird, und eine Strecke, die als *Maßeinheit* angenommen wird, wird *Zahlenachse* genannt. Die *Ox-Achse* hat ihren Ursprung im Punkt *O*, und der positive Richtungssinn ihrer Punkte verläuft von *O* nach *x*.

Jede reelle Zahl entspricht einem Punkt auf der Zahlenachse. Umgekehrt entspricht jeder Punkt auf der Zahlenachse einer einzigen reellen Zahl, die als *Koordinate* oder *Abszisse* des Punktes bezeichnet wird. Der Ursprung der Achse hat die Koordinate 0 (Null). Die Abszisse des Punktes *A* auf der Zahlenachse wird mit x_A bezeichnet. Wir schreiben dies wie folgt: $A(x_A)$.

Intuitiv besetzen die reellen Zahlen alle Punkte auf der Achse. Da verschiedene reelle Zahlen verschiedenen Punkten auf der Zahlenachse entsprechen, können wir jeden Punkt auf der Achse mit einer reellen Zahl identifizieren.

Bemerkungen

1. Reelle Zahlen, die rechts vom Ursprung dargestellt werden, nennt man positive reelle Zahlen. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „+“ vor die erste Ziffer geschrieben.

Wie bei den rationalen Zahlen kann auch bei den positiven Zahlen das Vorzeichen weggelassen werden.

Die positiven reellen Zahlen werden mit \mathbb{R}_+ bezeichnet.

Beispiele für positive reelle Zahlen: $+3 = 3$; $+\sqrt{6} = \sqrt{6}$; $+7,(51) = 7,(51)$ usw.

2. Die reellen Zahlen links vom Ursprung werden als negative reelle Zahlen bezeichnet. In ihrer Dezimalschreibweise wird das Zeichen „-“ vor die erste Ziffer geschrieben.

Die Menge der negativen reellen Zahlen wird mit \mathbb{R}_- bezeichnet.

Beispiele für negative reelle Zahlen: -2 ; $-\sqrt{11}$; $-7,1$; $-1,(3)$ usw.

3. Die reelle Zahl 0 hat kein Vorzeichen (sie ist weder positiv noch negativ).

Die Menge der reellen Zahlen, die nicht Null sind, wird mit \mathbb{R}^* bezeichnet.

Wir haben $\mathbb{R} = \mathbb{R}^* \cup \{0\} = \mathbb{R}_- \cup \{0\} \cup \mathbb{R}_+$.

4. Da irrationale Zahlen als unendliche Dezimalbrüche ausgedrückt werden, gelten für ihre Abrundungen oder Aufrundungen sowie für das Runden auf eine bestimmte Zifferordnung die gleichen Regeln wie für rationale Zahlen.

Zum Beispiel ist die Abrundung und Aufrundung von $\sqrt{2}$ auf Hundertstel genau 1,41 bzw. 1,42, und die Rundung (Approximation) von $\sqrt{7} = 2,6457\dots$ auf Tausendstel genau 2,646.

Beispiele

Abbildung 3 zeigt die folgenden reellen Zahlen unter Verwendung von Dezimalapproximationen (Dezimalnäherungswerte):

a. $-\sqrt{2} = -1,414\dots$;

b. $\sqrt{3} = 1,732\dots$;

c. $-\sqrt{5} = -2,236\dots$

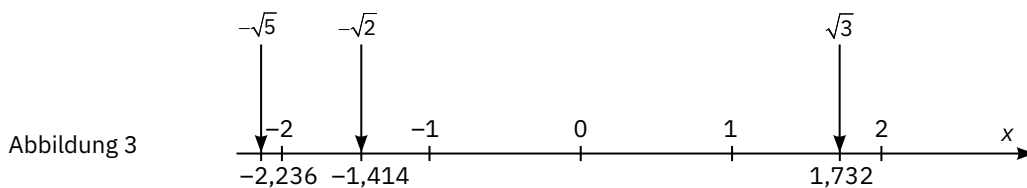


Abbildung 3

Mathe im Alltag

Stellt ein rechtwinkliges Dreieck mit den Kathetenlängen 1 cm dar.

Mithilfe des Satzes von Pythagoras ergibt sich, dass die Hypotenuse den Wert von $\sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ cm hat.

Zeichnet ein rechtwinkliges Dreieck mit einer Kathete der Länge $\sqrt{2}$ cm, die mit der Hypotenuse des vorherigen Dreiecks zusammenfällt, und mit der Länge der anderen Kathete 1 cm, wie in Abbildung 4. Mithilfe des Satzes von Pythagoras wird abgeleitet, dass die Hypotenuse des zweiten Dreiecks die Länge $\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \sqrt{2+1} = \sqrt{3}$ hat.

Führt das Verfahren fort und konstruiert Strecken mit einer Länge von $\sqrt{4}$ cm, $\sqrt{5}$ cm, $\sqrt{6}$ cm, und $\sqrt{7}$ cm.

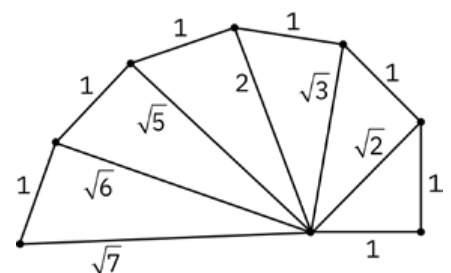


Abbildung 4

Was stellen wir fest?

Mithilfe des Geodreiecks und des Zirkels können wir für jede natürliche Zahl $n \geq 2$ eine Strecke der Länge \sqrt{n} cm darstellen. Mithilfe des Zirkels und dieser Strecke können wir die reelle Zahl \sqrt{n} genau auf der Achse einzeichnen.

Wusstet ihr das?

Die oben abgebildete Spirale wurde im 5. Jahrhundert v. Chr. von dem Mathematiker Theodoros von Kyrene entdeckt. Sie wird *Spirale von Theodoros* oder *Schnecke des Pythagoras* genannt. Theodoros blieb bei der Darstellung von $\sqrt{17}$ stehen, weil er glaubte, dass sich für $n \geq 18$ die Hypotenusen der Dreiecke mit den bereits dargestellten Strecken überschneiden.

Im Jahr 1958 bewies der Mathematiker Erich Teuffel, dass sich die Hypotenusen der Spirale nicht überschneiden, egal wie lang man Theodoros' Verfahren fortsetzt.

Der Absolutbetrag (Betrag) einer reellen Zahl

Problemstellung

In Abbildung 5 sind die Punkte, die den Zahlen $-3, -\sqrt{2}, \sqrt{2}$ und 3 entsprechen, auf einer Achse aufgetragen.



Die Punkte, die den entgegengesetzten Zahlen -3 und 3 entsprechen, haben den gleichen Abstand vom Ursprung. Die Punkte, die den Zahlen $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$ entsprechen, haben ebenfalls den gleichen Abstand vom Ursprung. Wir schließen daraus, dass die Zahlen $-\sqrt{2}$ und $\sqrt{2}$ ebenfalls entgegengesetzt (Gegenzahlen) sind.

Was stellen wir fest?

Jede reelle Zahl hat eine entgegengesetzte Zahl. Die entgegengesetzten reellen Zahlen befinden sich auf der Zahlenachse im gleichen Abstand vom Ursprung, auf beiden Seiten davon.

Merke dir!

Zwei reelle Zahlen, die nicht null sind, werden als *entgegengesetzt* bezeichnet, wenn ihnen auf der Zahlenachse zwei Punkte entsprechen, die gleich weit vom Ursprung entfernt sind.

Wenn x eine reelle Zahl ist, wird $-x$ als die entgegengesetzte Zahl von x bezeichnet. Die entgegengesetzte Zahl der reellen Zahl 0 ist 0 .

Beispiele

- Die Gegenzahl von 6 ist -6 .
- Die Gegenzahl von $-1, (5)$ ist $1, (5)$.
- Die Gegenzahl von $\sqrt{3}$ ist $-\sqrt{3}$.
- Die Gegenzahl von $3,5055055505\dots$ ist $-3,5055055505\dots$.

Merke dir!

Der Absolutbetrag einer reellen Zahl x ist der Abstand zwischen dem Ursprung und dem Punkt, der der Zahl x auf der Zahlenachse entspricht.

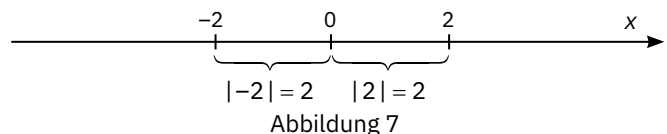
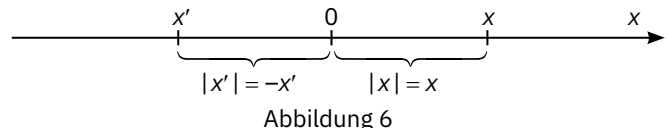
Der Absolutbetrag der reellen Zahl x , auch *Absolutwert*, *Betrag* oder *Modul* von x genannt, wird mit $|x|$ bezeichnet.

Bemerkungen

- Aus der Interpretation des Absolutbetrags als Abstand (Abbildung 6) folgt, dass der Absolutbetrag einer positiven reellen Zahl die Zahl selbst ist und der Absolutbetrag einer negativen reellen Zahl gleich der ihr entgegengesetzten Zahl ist.

$$\text{Das heißt, wir haben: } |x| = \begin{cases} x, & \text{wenn } x > 0 \\ 0, & \text{wenn } x = 0 \\ -x, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

- Die Absolutbeträge zweier entgegengesetzter Zahlen sind gleich: $|-x| = |x|$ für jedes $x \in \mathbb{R}$. Ein Beispiel ist in Abbildung 7 zu sehen.



3. Eigenschaften des Absolutbetrags einer reellen Zahl

- a. Der Absolutbetrag jeder reellen Zahl ist größer oder gleich 0 (er ist eine nichtnegative Zahl):
 $|x| \geq 0$ für jede reelle Zahl x .
 Außerdem ist $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$ ist.
- b. Wenn a und x reelle Zahlen sind und $a > 0$, dann ist $|x| = a$ nur dann, wenn $x = a$ oder $x = -a$.
- c. Zwei beliebige entgegengesetzte reelle Zahlen haben denselben Absolutbetrag: $|x| = |-x|$ für jede reelle Zahl x .
- d. Wenn x und y reelle Zahlen sind, dann ist $|x| = |y|$ nur dann, wenn $x = y$ oder $x = -y$.
- e. $\sqrt{x^2} = |x|$ für jede reelle Zahl x .
- f. In der Menge der reellen Zahlen werden die Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Potenzierung eingeführt, indem die Operationen aus der Menge der rationalen Zahlen entsprechend erweitert werden.
- i. Der Absolutbetrag der Summe von zwei reellen Zahlen ist höchstens gleich der Summe der Absolutbeträge der beiden Zahlen:
 $|x + y| \leq |x| + |y|$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y .
- ii. Der Absolutbetrag des Produkts zweier reeller Zahlen ist gleich dem Produkt der Absolutbeträge der beiden Zahlen:
 $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y .
- iii. Der Absolutbetrag des Verhältnisses zweier reeller Zahlen ist gleich dem Verhältnis der Absolutbeträge der beiden reellen Zahlen:
 $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$ für zwei beliebige reelle Zahlen x und y , wobei $y \neq 0$ ist.
- iv. Der Absolutbetrag einer Potenz mit ganzzahligem Exponenten einer reellen Zahl ist gleich der Potenz ihres Absolutbetrags:
 $|x^n| = |x|^n$ für jede reelle Zahl x und jede ganze Zahl n .

Beispiele

Überprüft die oben genannten Eigenschaften anhand der Beispiele in der folgenden Tabelle.

x	y	$ x $	$ y $	$ x \cdot y $	$\left \frac{x}{y} \right $	$ x + y $	$ x + y $
2	3	2	3	6	$\frac{2}{3}$	5	5
-3	-2	3	2	6	$\frac{3}{2}$	5	5
0	-8	0	8	0	0	8	8
4	-7	4	7	28	$\frac{4}{7}$	3	11
$-2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	$2\sqrt{3}$	$6\sqrt{3}$	36	$\frac{1}{3}$	$4\sqrt{3}$	$8\sqrt{3}$
$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	7	1	0	$2\sqrt{7}$

Beobachtet, in welchen Situationen die Ungleichung $|x + y| \leq |x| + |y|$ Gleichheit ergibt. Begründet!

Vergleichen und Ordnen der reellen Zahlen

Problemstellung

Welche der Zahlen $\sqrt{2}$ und 1,5 ist größer? Um dies zu entscheiden, könnt ihr eine der Methoden wählen, die wir bei rationalen Zahlen gelernt haben:

A. Wir vergleichen die Dezimalschreibweisen der beiden Zahlen. Da $\sqrt{2} = 1,414\dots$, folgt daraus, dass $\sqrt{2} < 1,5$.

B. Wir stellen $\sqrt{2}$ und 1,5 auf der Zahlenachse wie in Abbildung 8 dar.

Da 1,5 rechts von $\sqrt{2}$, liegt, bedeutet dies, dass 1,5 größer ist als $\sqrt{2}$.

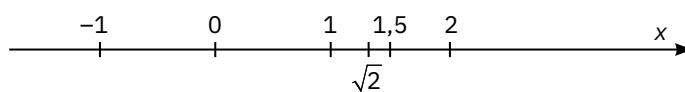


Abbildung 8

Lösung:

- a. $1 < 1,6 < 2$.
- b. Wir können dies auf zwei Arten tun:
- Wir approximieren $-\sqrt{10}$: $-\sqrt{10} = -3,16\dots$. Daraus folgt, dass $-4 < -\sqrt{10} < -3$.
 - Wir bestimmen zwei aufeinanderfolgende Quadratzahlen mit 10 dazwischen. Diese sind 9 und 16. Wir erhalten also $9 < 10 < 16$, woraus folgt, dass $\sqrt{9} < \sqrt{10} < \sqrt{16}$, d. h., $3 < \sqrt{10} < 4$, also $-4 < -\sqrt{10} < -3$.
- c. Wir berechnen zuerst $\sqrt{6,25} = \sqrt{(2,5)^2} = 2,5$. Wir erhalten $2 < \sqrt{6,25} < 3$.

Vorgeschlagene Aufgaben



- Betrachtet die Zahlen: $-6; \sqrt{5}; 0; -2,8; \frac{4}{3}; -\sqrt{6}; 7; -10; \sqrt{15}; 5,4(12)$. Gebt an, welche dieser Zahlen:
 - natürlich;
 - ganz;
 - rational;
 - irrational;
 - reell sind.
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - 0 ist eine natürliche Zahl.
 - 1,6 ist eine ganze Zahl.
 - $-5,(4)$ ist eine irrationale Zahl.
 - $\sqrt{3}$ ist eine reelle Zahl.
 - $\sqrt{4}$ ist eine natürliche Zahl.
 - $-\sqrt{8}$ ist eine irrationale Zahl.
- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - $9 \in \mathbb{N}$;
 - $0 \in \mathbb{Z}$;
 - $0 \notin \mathbb{Q}$;
 - $1,7 \in \mathbb{R}$;
 - $-\frac{3}{4} \in \mathbb{R}$;
 - $\sqrt{15} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$;
 - $\sqrt{15^2} \in \mathbb{N}$;
 - $\sqrt{(2,45)^2} \in \mathbb{Q}$.
- Ermittelt, falls erforderlich, mithilfe des Taschenrechners:
 - die Abrundungen (die unteren Näherungswerte) auf die Zehntelordnung der Zahlen $\sqrt{5}$ und $\sqrt{74}$;
 - die Aufrundungen (die oberen Näherungswerte) auf die Hundertstelordnung der Zahlen $\sqrt{7}$ und $\sqrt{68}$;
 - die Rundungen auf die Tausendstelordnung der Zahlen $\sqrt{17}$ und $\sqrt{219}$.
- Stellt die folgenden reellen Zahlen auf der Zahlenachse dar und schreibt sie dann in steigender Reihenfolge auf:
 - $-3; \sqrt{3}; -2,4; -\sqrt{2}; 1,3$;
 - $-\sqrt{6}; \sqrt{5}; \frac{3}{2}; -2; \sqrt{4}$;
 - $-2,5; \sqrt{2}; 1,5; -\sqrt{6}; \frac{5}{2}$.
- Füllt die Tabelle aus:

x	4	1,7	$\sqrt{10}$			$-\frac{5}{12}$	
-x				4,12	$\sqrt{18}$		$-\sqrt{13,1}$
x							

- Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch?
 - $|+3| = 3$;
 - $|-1,6| = +1,6$;
 - $|-9| = -9$;
 - $|\sqrt{5}| = \sqrt{5}$;
 - $|\sqrt{13}| = -\sqrt{13}$;
 - $|\frac{-3}{7}| = \frac{7}{3}$;
 - $|0| = 0$;
 - $|\sqrt{7,5}| = \sqrt{7,5}$.
- Zeigt, dass die folgenden Zahlen rational sind:
 - $\sqrt{\frac{4}{9}}$;
 - $\sqrt{\frac{25}{81}}$;
 - $\sqrt{7\frac{9}{16}}$;
 - $\sqrt{0,81}$.
- Entscheidet, welche der folgenden Zahlen rational und welche irrational sind:
 - $\sqrt{27^2}$;
 - $\sqrt{5^2 \cdot 2}$;
 - $\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^3}$;
 - $\sqrt{99}$.
- Betrachtet die Menge $A = \left\{-6; \frac{3}{4}; \sqrt{7}; -\sqrt{12}; 3,(4); \sqrt{24}; 0; 1,8\right\}$. Schreibt die Elemente der Mengen $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$.

11. Ordnet jede reelle Zahl zwischen zwei aufeinanderfolgenden ganzen Zahlen ein:
- a. $\square < 2,7 < \square$; b. $\square < \sqrt{6} < \square$; c. $\square < -\sqrt{20} < \square$; d. $\square < \sqrt{99} < \square$;
 e. $\square < \sqrt{\frac{243}{5}} < \square$; f. $\square < \sqrt{\frac{531}{2}} < \square$; g. $\square < \sqrt{751,3} < \square$; h. $\square < -\sqrt{5,4} < \square$.
12. a. Gebt zwei Beispiele von rationalen Zahlen zwischen 3 und 4 an.
 b. „Zwei irrationale Zahlen zwischen 3 und 4 sind ... und“ Füllt die Lücken aus, um eine wahre Aussage zu erhalten.
13. Bestimmt die Elemente der Mengen:
 a. $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < x < 4\}$; b. $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 < \sqrt{x} < 4\}$; c. $C = \{x \in \mathbb{N} \mid 1 \leq \sqrt{x} < 3\}$.
14. Vergleicht die Zahlen:
 a. $\sqrt{2}$ und 1,5; b. $-\sqrt{3}$ und -2; c. $\frac{2}{3}$ und $\sqrt{0,36}$; d. $-\sqrt{34}$ und $-\sqrt{35}$.
15. Ordnet die Zahlen in steigender Reihenfolge:
 a. -4; -3; 9; -2,(64); -3,89; -2,6; b. $-\sqrt{11}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{8}$; $-\sqrt{10}$; $\sqrt{7}$; c. 1; $\sqrt{3}$; 2; $\sqrt{2}$; 1,5.
16. Berechnet:
 a. $|1 - 1,5|$; b. $\left| \frac{1}{2} - 2 \right|$; c. $|\sqrt{2} - 1|$; d. $|\sqrt{5} - \sqrt{3}|$;
 e. $|4 - \sqrt{17}|$; f. $|\sqrt{8} + 3|$; g. $|\sqrt{5} - \sqrt{6}|$; h. $|\sqrt{7} + 2|$.
17. Betrachtet die Menge $A = \{\sqrt{1}; \sqrt{2}; \sqrt{3}; \dots; \sqrt{30}\}$.
 a. Bestimmt, wie viele rationale Zahlen und wie viele irrationale Zahlen A enthält.
 b. Berechnet die Summe der Quadrate der irrationalen Zahlen in A.
18. Zeigt, dass die Zahl \sqrt{x} in jedem der folgenden Fälle rational ist:
 a. $x = 3^2 + 4^2$; b. $x = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3$; c. $x = 7^2 + 24^2$; d. $x = 7^{100}$.
19. Zeigt, dass die folgenden Zahlen irrational sind:
 a. $\sqrt{1+2+3+\dots+10}$; b. $\sqrt{5^{10}+6^{10}+1}$; c. $\sqrt{10^{10}+11^{11}+12^{12}}$.
20. Bestimmt die reellen Zahlen x, wenn bekannt ist, dass:
 a. $|x| = \sqrt{5}$; b. $|x| = -\sqrt{10}$; c. $|x| \leq 0$; d. $|x| > 0$.
21. Beweist, dass wenn x eine positive irrationale Zahl ist, dann ist \sqrt{x} irrational.
22. Sei die Menge $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -\sqrt{15} < |x| < \sqrt{14}\}$, $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid \sqrt{13} < |x| < \sqrt{23}\}$ und $C = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq \sqrt{17}\}$.
 Bestimmt $A \cap B$, $B \cap C$ und $C \cap A$.
23. Bestimmt die Werte der Ziffer x in der Zehnerbasis so, dass:
 a. $\sqrt{x76} \in \mathbb{Q}$; b. $\sqrt{x84} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$; c. $\sqrt{\frac{84x}{45}} \in \mathbb{Q}$; d. $\sqrt{\frac{x2}{2}} \notin \mathbb{Q}$.

Test

1. Stellt die folgenden reellen Zahlen auf der Zahlenachse dar und schreibt sie in steigender Reihenfolge auf:
 -1,5; $-\sqrt{3}$; 0,5; $\sqrt{5}$; $\frac{3}{2}$. (3 Pkte.)
2. Beweist, dass die Menge $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \leq \sqrt{x} < 3\}$ gleich ist mit der Menge:
 a. $\{5; 6; 7; 8\}$; b. $\{4; 5; 6; 7; 8\}$; c. $\{4; 5; 6; 7; 8; 9\}$; d. $\{5; 6; 7; 8; 9\}$. (3 Pkte.)
3. Betrachtet die Menge $A = \left\{-4; \sqrt{2}; -\sqrt{7}; \sqrt{10}; -1,(25); \frac{1}{4}; 0; -11,6\right\}$.
 Schreibt die Elemente folgender Mengen auf: $A \cap \mathbb{N}$, $A \cap \mathbb{Z}$, $A \cap \mathbb{Q}$, $A \cap (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$, $A \cap \mathbb{R}$, $A \setminus \mathbb{Q}$, $A \setminus \mathbb{R}$. (3 Pkte.)

Bemerkung: 1 Punkt von Amts wegen.

Arbeitszeit: 20 Minuten.



3. Lektion: Rechenregeln für Quadratwurzeln

Schlüsselwörter

Produkt der Quadratwurzeln

Herausheben von Faktoren aus der Wurzel

Quotient (Verhältnis) der Quadratwurzeln

Einführen von Faktoren unter die Wurzel

Das Produkt der Quadratwurzeln

Problemstellung

Gesucht ist ein Zusammenhang zwischen der Quadratwurzel des Produkts zweier positiver reeller Zahlen und dem Produkt der Quadratwurzeln dieser Zahlen. Für die Zahlen 4 und 9 erhalten wir: $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = 2 \cdot 3 = 6$ und $\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6$.

Also, $\sqrt{4} \cdot \sqrt{9} = \sqrt{4 \cdot 9}$.

Ähnlich verhält es sich bei 16 und 36: $\sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = 4 \cdot 6 = 24$, und $\sqrt{16 \cdot 36} = \sqrt{576} = 24$. Also $\sqrt{16} \cdot \sqrt{36} = \sqrt{16 \cdot 36}$.

Was stellen wir fest?

Das Produkt der Quadratwurzeln der Zahlen 4 und 9 ist gleich mit der Quadratwurzel des Produkts der Zahlen 4 und 9. Das Gleiche gilt für die Zahlen 16 und 36.

Merke dir!

Das Produkt der Quadratwurzeln zweier positiver reeller Zahlen ist gleich mit der Quadratwurzel des Produkts der beiden Zahlen. Mit anderen Worten:

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b} \text{ für beliebige reelle Zahlen } a \geq 0, b \geq 0.$$

Die obige Gleichheit wird auch in der Form geschrieben:

$$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} \text{ (Zerlegung einer Wurzel in ein Produkt von Wurzeln).}$$

Beispiele

$$1. \sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a \cdot b}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{18} = \sqrt{2 \cdot 18} = \sqrt{36} = 6;$$

$$\sqrt{242} \cdot \sqrt{50} = \sqrt{242 \cdot 50} = \sqrt{12100} = 110;$$

$$\sqrt{\frac{8}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 27}{3 \cdot 2}} = \sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6;$$

$$2. \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\sqrt{25 \cdot 36} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{36} = 5 \cdot 6 = 30;$$

$$\sqrt{0,25 \cdot 9} = \sqrt{0,25} \cdot \sqrt{9} = 0,5 \cdot 3 = 1,5;$$

$$\sqrt{4900} = \sqrt{49 \cdot 100} = \sqrt{49} \cdot \sqrt{100} = 7 \cdot 10 = 70.$$

Der Quotient der Quadratwurzeln

Problemstellung

Gesucht wird ein Zusammenhang zwischen der Wurzel des Quotienten zweier positiver rationaler Zahlen und den Quotienten der Wurzeln dieser Zahlen.

Für die Zahlen 36 und 4 erhalten wir: $\sqrt{36} : \sqrt{4} = 6 : 2 = 3$ und $\sqrt{36 : 4} = \sqrt{9} = 3$.

Also $\sqrt{36} : \sqrt{4} = \sqrt{36 : 4}$.

Für 25 und 9 ergibt sich daraus eine Analogie: $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ und $\sqrt{\frac{25}{9}} = \sqrt{\left(\frac{5}{3}\right)^2} = \frac{5}{3}$.

Also $\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}} = \sqrt{\frac{25}{9}}$.

Was stellen wir fest?

Der Quotient der Wurzeln der Zahlen 36 und 4 ist gleich mit der Wurzel des Quotienten der Zahlen 36 und 4. Das Gleiche gilt für die Zahlen 25 und 9.

Merke dir!

Der Quotient der Wurzeln zweier positiver reeller Zahlen ist gleich der Wurzel des Quotienten der beiden Zahlen.

Mit anderen Worten:

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \text{ für beliebige reelle Zahlen } a \geq 0, b > 0.$$

Die obige Gleichheit wird auch in der Form geschrieben:

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \text{ (Zerlegung einer Quadratwurzel in ein Verhältnis von Quadratwurzeln)}$$

Beispiele

$$1. \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{0,03}} = \sqrt{\frac{3}{0,03}} = \sqrt{100} = 10;$$

$$\frac{\sqrt{28}}{\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{28}{7}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\frac{\sqrt{405}}{\sqrt{500}} = \sqrt{\frac{405}{500}} = \sqrt{\frac{81}{100}} = \frac{9}{10};$$

$$2. \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

$$\sqrt{\frac{36}{25}} = \frac{\sqrt{36}}{\sqrt{25}} = \frac{6}{5};$$

$$\sqrt{1,69} = \sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{\sqrt{169}}{\sqrt{100}} = \frac{13}{10};$$

$$\sqrt{5,(\overline{4})} = \sqrt{5\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{49}{9}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{9}} = \frac{7}{3}.$$

Bemerkung

Die Wurzel der Summe zweier positiver Zahlen ist nicht gleich der Summe der Wurzeln der beiden Zahlen.

Genauer gesagt, wenn $a, b > 0$, dann $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$.

Für $a = 16$ und $b = 25$ ergibt sich zum Beispiel $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 4 + 5 = 9$, aber $\sqrt{a+b} = \sqrt{34} \approx 5,83\dots$

Herausheben von Faktoren aus der Wurzel**Problemstellung**

Wir wollen eine Wurzel in Form eines Produkts schreiben, sodass einer der Faktoren von 1 verschieden ist und keine Wurzeln enthält.

Wir stellen fest, dass $20 = 4 \cdot 5$, also ist $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$.

Da $18 = 9 \cdot 2$ ist, können wir $\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$ schreiben.

Wir schreiben $75 = 25 \cdot 3$, was $\sqrt{75} = \sqrt{25 \cdot 3} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{3} = 5 \cdot \sqrt{3}$ ergibt.

Da $50 = 25 \cdot 2$ ist, ergibt sich: $\sqrt{50} = \sqrt{25 \cdot 2} = \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} = 5 \cdot \sqrt{2}$.

Was stellen wir fest?

Mithilfe der Tatsache, dass die Wurzel des Produkts zweier positiver Zahlen gleich dem Produkt der Wurzeln der Zahlen ist, können wir einige Wurzeln als Produkt einer Wurzel und eines von 1 verschiedenen Faktors, der keine Wurzeln enthält, schreiben.

Merke dir!

Für zwei beliebige positive reelle Zahlen a und b gilt die Gleichheit $\sqrt{a^2 b} = a \cdot \sqrt{b}$.

Die Schreibweise der Zahl $\sqrt{a^2 \cdot b}$ in der Form $a \cdot \sqrt{b}$ heißt, den Faktor a aus der Wurzel herausheben.

Beispiele: a. $\sqrt{5^2 \cdot 3} = 5\sqrt{3}$ (Wir haben den Faktor 5 aus der Wurzel herausgehoben.)

b. $\sqrt{7^2 \cdot 11} = 7\sqrt{11}$ (Wir haben den Faktor 7 aus der Wurzel herausgehoben.)

c. $\sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 \cdot 3} = 3\sqrt{3}$ (Wir haben den Faktor 3 aus der Wurzel herausgehoben.)

d. $\sqrt{7^5} = \sqrt{(7^2)^2 \cdot 7} = 7^2 \sqrt{7} = 49\sqrt{7}$ (Wir haben eine Potenz von 7 aus der Wurzel herausgehoben.)



1.3



Bemerkungen

1. Wenn a eine beliebige reelle Zahl und b eine positive reelle Zahl ist, dann gilt der Ausdruck $\sqrt{a^2 b}$. In diesem Fall gilt die Beziehung: $\sqrt{a^2 b} = |a| \cdot \sqrt{b}$.

Beispiel: $\sqrt{(-5)^2 \cdot 3} = \sqrt{(-5)^2} \cdot \sqrt{3} = |-5| \cdot \sqrt{3} = 5\sqrt{3}$.

2. Befindet sich unter der Wurzel eine natürliche Zahl, so geht dem Herausheben der Faktoren aus der Wurzel oft die Zerlegung der natürlichen Zahl in Primfaktoren voraus.

Beispiele: a. Die Primfaktorzerlegung der natürlichen Zahl 12 ist $12 = 2^2 \cdot 3$. Daraus folgt:

$$\sqrt{12} = \sqrt{2^2 \cdot 3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} = 2\sqrt{3}.$$

b. Die Zahl 54 lässt sich wie folgt in Primfaktoren zerlegen: $54 = 2 \cdot 3^3$. Dann:

$$\sqrt{54} = \sqrt{2 \cdot 3^3} = \sqrt{2 \cdot 3 \cdot 3^2} = \sqrt{3^2 \cdot 6} = 3\sqrt{6}.$$

Einführung von Faktoren unter die Wurzel



Problemstellung

Welche der Zahlen $2\sqrt{3}$ und $3\sqrt{2}$ ist größer?

Methode I: Wir verwenden Näherungswerte:

$$\sqrt{3} = 1,732\dots, \text{ also } 2\sqrt{3} \approx 3,464\dots;$$

$$\sqrt{2} = 1,414\dots, \text{ also } 3\sqrt{2} \approx 4,242\dots$$

Beachtet, dass $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Methode II Wir verwenden die Rechenregeln für Quadratwurzeln:

$$2\sqrt{3} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12};$$

$$3\sqrt{2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{18}.$$

Da $\sqrt{12} < \sqrt{18}$ ist, ist das Ergebnis $2\sqrt{3} < 3\sqrt{2}$.

Was stellen wir fest?

Um die beiden Zahlen nach der zweiten Methode zu vergleichen, haben wir die Zahlen $2\sqrt{3}$ und $3\sqrt{2}$ als eine einzige Wurzel geschrieben. Man sagt, dass wir die Faktoren, die vor dem Wurzelzeichen stehen, unter die Wurzel eingeführt haben.



Merke dir!

Für zwei beliebige Zahlen $a, b \geq 0$ gilt die Gleichheit $a \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a^2 b}$.

Das Schreiben der Zahl $a \cdot \sqrt{b}$ in der Form $\sqrt{a^2 \cdot b}$ nennt man die Einführung des Faktors a unter die Wurzel.

Beispiele:

a. $3\sqrt{11} = \sqrt{3^2 \cdot 11} = \sqrt{99}$

(Wir haben den Faktor 3 unter die Wurzel eingeführt.)

b. $7\sqrt{3} = \sqrt{7^2 \cdot 3} = \sqrt{147}$

(Wir haben den Faktor 7 unter die Wurzel eingeführt.)

c. $5\sqrt{5} = \sqrt{5^2 \cdot 5} = \sqrt{125}$

(Wir haben den Faktor 5 unter die Wurzel eingeführt.)

d. $\frac{3}{4}\sqrt{\frac{7}{5}} = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{9}{16} \cdot \frac{7}{5}} = \sqrt{\frac{9 \cdot 7}{16 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{63}{80}}$

(Wir haben den Faktor $\frac{3}{4}$ unter die Wurzel eingeführt.)

Gelöste Übungen und Aufgaben. Ideen, Methoden, Anwendungstechniken



1. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Produkt von zwei Wurzeln:

a. $\sqrt{58}$;

b. $\sqrt{35}$;

c. $\sqrt{51}$;

d. $\sqrt{187}$.

Lösung:

Wir verwenden die Regel $\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$ für $a \geq 0, b \geq 0$.

a. $\sqrt{58} = \sqrt{2 \cdot 29} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{29}$;

b. $\sqrt{35} = \sqrt{5 \cdot 7} = \sqrt{5} \cdot \sqrt{7}$;

c. $\sqrt{51} = \sqrt{17 \cdot 3} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{3}$;

d. $\sqrt{187} = \sqrt{17 \cdot 11} = \sqrt{17} \cdot \sqrt{11}$.

2. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Quotient zweier Wurzeln:

a. $\sqrt{\frac{24}{5}}$;

b. $\sqrt{13:2}$;

c. $\sqrt{0,147}$;

d. $\sqrt{3,(5)}$.

Lösung:

Wir verwenden die Regel $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ für $a \geq 0, b > 0$.

$$\text{a. } \sqrt{\frac{24}{5}} = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{5}};$$

$$\text{b. } \sqrt{13:2} = \sqrt{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}};$$

$$\text{c. } \sqrt{0,147} = \sqrt{\frac{147}{1000}} = \frac{\sqrt{147}}{\sqrt{1000}};$$

$$\text{d. } \sqrt{3,(5)} = \sqrt{3\frac{5}{9}} = \sqrt{\frac{32}{9}} = \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{9}}.$$

3. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus und schreibt, wo es der Fall ist, die Existenzbedingungen von Wurzeln auf:

$$\text{a. } \sqrt{24x^2};$$

$$\text{b. } \sqrt{12x^3};$$

$$\text{c. } \sqrt{20x^4y};$$

$$\text{d. } \sqrt{27x^5y^2}.$$

Lösung:

a. Da $x^2 \geq 0$ für jedwede reelle Zahl x , hat der Ausdruck $\sqrt{24x^2}$ Sinn für jedwede reelle Zahl x . Dann:

$$\sqrt{24x^2} = \sqrt{2^3 \cdot 3 \cdot x^2} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^2} = 2\sqrt{6} \cdot |x| = \begin{cases} 2x\sqrt{6}, & \text{wenn } x \geq 0 \\ -2x\sqrt{6}, & \text{wenn } x < 0 \end{cases}$$

b. Die Existenzbedingung der Quadratwurzel ist $x^3 \geq 0$, was zu $x \geq 0$ führt. Wir haben:

$$\sqrt{12x^3} = \sqrt{2^2 \cdot 3 \cdot x^3} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{x^3} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot x \cdot \sqrt{x} = 2x\sqrt{3x}.$$

c. Da $x^4 \geq 0$ für jedwede reelle Zahl x , gibt es keine Bedingung für x . Aber die Bedingung $y \geq 0$ muss erfüllt sein. Dann:

$$\sqrt{20x^4y} = \sqrt{2^2 \cdot 5 \cdot x^4 \cdot y} = \sqrt{2^2} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{x^4} \cdot \sqrt{y} = 2 \cdot \sqrt{5} \cdot x^2 \cdot \sqrt{y} = 2x^2\sqrt{5y}.$$

d. Die zu erfüllende Bedingung ist $x^5 \geq 0$ was zu $x \geq 0$ führt. Da $y^2 \geq 0$ ist, muss jedwede reelle Zahl y keine Bedingung erfüllen. Wir erhalten:

$$\sqrt{27x^5y^2} = \sqrt{3^3 \cdot x^5 \cdot y^2} = \sqrt{3^3} \cdot \sqrt{x^5} \cdot \sqrt{y^2} = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot x^2 \cdot \sqrt{x} \cdot |y| = 3x^2|y|\sqrt{3x}.$$

4. Führt die Faktoren unter die Wurzel ein:

$$\text{a. } x\sqrt{5}, x < 0;$$

$$\text{b. } -a\sqrt{10}, a < 0;$$

$$\text{c. } -y^2\sqrt{7}, y < 0;$$

$$\text{d. } -xy^3\sqrt{6}, x < 0, y \geq 0.$$

Lösung:

Bei Quadratwurzeln werden nur positive Faktoren eingeführt, sodass wir darauf achten müssen, diese Bedingung zu erfüllen.

a. Da $x < 0$ ist, folgt daraus, dass $-x > 0$ ist.

$$\text{Somit ist } x\sqrt{5} = -(-x)\sqrt{5} = -\sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{5} = -\sqrt{(-x)^2 \cdot 5} = -\sqrt{5x^2}.$$

b. Da $a < 0$ ist, folgt daraus, dass $-a > 0$ ist. Also, $-a\sqrt{10} = \sqrt{(-a)^2} \cdot \sqrt{10} = \sqrt{(-a)^2 \cdot 10} = \sqrt{10a^2}$.

c. Wir haben $y < 0$, aber $y^2 > 0$. Somit ist $-y^2\sqrt{7} = -\sqrt{(y^2)^2} \cdot \sqrt{7} = -\sqrt{(y^2)^2 \cdot 7} = -\sqrt{7y^4}$.

d. Wir haben $x < 0$, also $-x > 0$. Da $y \geq 0$ ist, folgt daraus, dass $y^3 \geq 0$ ist. Wir erhalten:

$$-xy^3\sqrt{6} = \sqrt{(-x)^2} \cdot \sqrt{(y^3)^2} \cdot \sqrt{6} = \sqrt{(-x)^2 \cdot (y^3)^2 \cdot 6} = \sqrt{6x^2y^6}.$$

5. Vergleiche die folgenden Zahlen:

$$\text{a. } 2\sqrt{7} \text{ und } 7\sqrt{2};$$

$$\text{b. } -3\sqrt{3} \text{ und } -4\sqrt{2};$$

$$\text{c. } 4\sqrt{3} \text{ und } 7;$$

$$\text{d. } 6\sqrt{3} - 4\sqrt{7} \text{ und } 0.$$

Lösung:

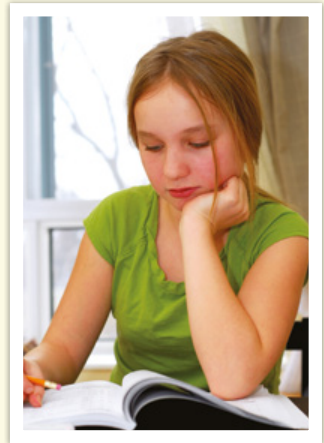
a. Wir führen zuerst die Faktoren unter die Wurzel ein:

$$2\sqrt{7} = \sqrt{2^2 \cdot 7} = \sqrt{28} \text{ und } 7\sqrt{2} = \sqrt{7^2 \cdot 2} = \sqrt{98}. \text{ Da } \sqrt{28} < \sqrt{98} \text{ ist, folgt daraus, dass } 2\sqrt{7} < 7\sqrt{2} \text{ ist.}$$

b. $-3\sqrt{3} = -\sqrt{3^2 \cdot 3} = -\sqrt{27}$ und $-4\sqrt{2} = -\sqrt{4^2 \cdot 2} = -\sqrt{32}$. Da $-\sqrt{27} > -\sqrt{32}$ ist, folgt daraus, dass $-3\sqrt{3} > -4\sqrt{2}$ ist.

c. $4\sqrt{3} = \sqrt{4^2 \cdot 3} = \sqrt{48}$ und $7 = \sqrt{7^2} = \sqrt{49}$. Da $\sqrt{48} < \sqrt{49}$ ist, folgt daraus, dass $4\sqrt{3} < 7$ ist.

d. $6\sqrt{3} = \sqrt{6^2 \cdot 3} = \sqrt{108}$ und $4\sqrt{7} = \sqrt{4^2 \cdot 7} = \sqrt{112}$. Da $\sqrt{108} < \sqrt{112}$ ist, folgt daraus, dass $\sqrt{108} - \sqrt{112} < 0$ ist, also $6\sqrt{3} - 4\sqrt{7} < 0$.



Vorgeschlagene Aufgaben



1. Schreibt mit nur einer Wurzel:

a. $\sqrt{9} \cdot \sqrt{3}$; b. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{6}$; c. $\sqrt{7} \cdot \sqrt{2}$; d. $\sqrt{11} \cdot \sqrt{15}$;
 e. $\sqrt{10} \cdot \sqrt{13}$; f. $\sqrt{21} \cdot \sqrt{5}$; g. $\sqrt{19} \cdot \sqrt{6}$; h. $\sqrt{22} \cdot \sqrt{3}$.

2. Berechnet:

a. $\sqrt{1,2} \cdot \sqrt{5}$; b. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{2,2}$; c. $\sqrt{3,1} \cdot \sqrt{10}$; d. $\sqrt{1,12} \cdot \sqrt{50}$;
 e. $-\sqrt{3,5} \cdot \sqrt{20}$; f. $-\sqrt{0,4} \cdot (-\sqrt{15})$; g. $\sqrt{4,5} \cdot (-\sqrt{24})$; h. $\sqrt{0,06} \cdot \sqrt{50}$.

3. Berechnet:

a. $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{3}{5}}$; b. $\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{5}$; c. $-\sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \sqrt{\frac{2}{7}}$; d. $\sqrt{1\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{2\frac{1}{6}}$;
 e. $-\sqrt{0,5} \cdot (-\sqrt{1,(3)})$; f. $\sqrt{0,(5)} \cdot (-\sqrt{1,1})$; g. $\sqrt{2,(2)} \cdot \sqrt{0,75}$; h. $\sqrt{0,0(4)} \cdot \sqrt{13,5}$.

4. Zeigt, dass die folgenden Rechnungen eine natürliche Zahl ergeben:

a. $\sqrt{5} \cdot \sqrt{3,2}$; b. $\sqrt{6,25} \cdot \sqrt{4}$; c. $-\sqrt{0,9} \cdot (-\sqrt{40})$; d. $\sqrt{200} \cdot \sqrt{0,32}$;
 e. $\sqrt{\frac{4}{5}} \cdot \sqrt{125}$; f. $\sqrt{1\frac{3}{7}} \cdot \sqrt{0,7}$; g. $\sqrt{5,(3)} \cdot \sqrt{0,75}$; h. $\sqrt{2,1(3)} \cdot \sqrt{7,5}$.

5. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Produkt von zwei Wurzeln:

a. $\sqrt{6}$; b. $\sqrt{35}$; c. $\sqrt{49}$; d. $\sqrt{28}$; e. $\sqrt{46}$; f. $\sqrt{88}$; g. $\sqrt{164}$; h. $\sqrt{250}$.

6. Schreibt mit einer einzigen Wurzel:

a. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}$; b. $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{2}}$; c. $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$; d. $\frac{\sqrt{22}}{\sqrt{2}}$; e. $\frac{\sqrt{35}}{\sqrt{7}}$; f. $\frac{\sqrt{55}}{\sqrt{11}}$; g. $\frac{\sqrt{14}}{\sqrt{42}}$; h. $\frac{\sqrt{60}}{\sqrt{280}}$.

7. Schreibt jede der folgenden Zahlen als Quotient (Verhältnis) zweier Wurzeln:

a. $\sqrt{\frac{2}{7}}$; b. $\sqrt{\frac{3}{10}}$; c. $\sqrt{4\frac{3}{5}}$; d. $\sqrt{5\frac{7}{10}}$; e. $\sqrt{0,7}$; f. $\sqrt{1,325}$; g. $\sqrt{3,(2)}$; h. $\sqrt{2,4(1)}$.

8. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

a. $\sqrt{12}$; b. $\sqrt{20}$; c. $\sqrt{68}$; d. $\sqrt{60}$; e. $\sqrt{92}$; f. $\sqrt{120}$; g. $\sqrt{200}$; h. $\sqrt{252}$.

9. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

a. $\sqrt{2^2 \cdot 3 + 3\sqrt{4}}$; b. $\sqrt{2^3 \cdot 5 + 2\sqrt{25}}$; c. $\sqrt{2^2 \cdot 3^2 + 5\sqrt{16}}$; d. $\sqrt{25 \cdot 4 - 2\sqrt{25}}$;
 e. $\sqrt{4\sqrt{121} + 2^3 \cdot 3^2}$; f. $\sqrt{6^2 \cdot 5 + 3\sqrt{36}}$; g. $\sqrt{15^2 \cdot 2 - 6\sqrt{225}}$; h. $\sqrt{67 \cdot 2^2 + 5\sqrt{361}}$.

10. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus:

a. $\sqrt{\frac{48}{25}}$; b. $\sqrt{\frac{68}{144}}$; c. $\sqrt{\frac{192}{169}}$; d. $\sqrt{\frac{245}{256}}$; e. $\sqrt{\frac{450}{81}}$; f. $\sqrt{\frac{864}{121}}$; g. $\sqrt{\frac{748}{289}}$; h. $\sqrt{\frac{875}{441}}$.

11. Hebt die Faktoren aus der Wurzel heraus und schreibt, wo es der Fall ist, die Existenzbedingungen von Wurzeln auf:

a. $\sqrt{20x^2}$; b. $\sqrt{45x^2y}$; c. $\sqrt{32x^3y^2}$; d. $\sqrt{68x^4y^6}$.

12. Ordnet jeder Zahl in der ersten Zeile die entsprechende Schreibweise in der zweiten Zeile zu:

a. $2\sqrt{5}$ b. $3\sqrt{6}$ c. $4\sqrt{2}$ d. $9\sqrt{3}$ e. $-2\sqrt{7}$ f. $-4\sqrt{5}$ g. $-5\sqrt{10}$ h. $-7\sqrt{6}$

A. $\sqrt{243}$ B. $\sqrt{32}$ C. $-\sqrt{28}$ D. $\sqrt{18}$ E. $-\sqrt{250}$ F. $-\sqrt{80}$ G. $-\sqrt{294}$ H. $\sqrt{20}$ I. $\sqrt{54}$